2016年　東大数学　文系第1問

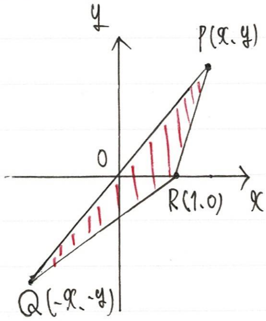
△PQRが鋭角三角形になる

⇕

点P.Q.Rが三角形をなす
（条件①）

かつ

△PQRが鋭角三角形になる
（条件②）



条件①

ⓐ 3点のうち、どの2点を選んでも同一の点はない。

ⓑ 3点が、同一直線上にない。

ⓐ ⇔ $(x,y) \neq (0,0)$ かつ $(x,y) \neq (1,0)$ かつ $(x,y) \neq (-1,0)$

ⓑ ⇔ $y \neq 0$

ⓐが全て $y \neq 0$ をみたす

よって 条件1 ⇔ ⓐかつⓑ は $y \neq 0$

条件②

鋭角三角形の定義は「最大角が鋭角である。」

今回は∠P、∠Q、∠Rのどれが最大かわからないので、

∠Pが鋭角 かつ ∠Qが鋭角 かつ ∠Rが鋭角

とする。

座標上で鋭角を示すための技術は

・余弦定理で示す　← 解法1

・ベクトルの内積で示す。　← 解法2

解法1 余弦定理

一般に、△ABCの∠Aが鋭角

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0$$

分子だけとり出す

$$\Leftrightarrow b^2+c^2 > a^2$$

なので、

△PQRにおいて、

$$\begin{cases} \angle P < 90^\circ \Leftrightarrow PQ^2+PR^2 > QR^2 \\ \angle Q < 90^\circ \Leftrightarrow QP^2+QR^2 > PR^2 \\ \angle R < 90^\circ \Leftrightarrow RP^2+RQ^2 > PQ^2 \end{cases}$$

P(x,y) Q(−x,−y) R(1,0)を利用して、

$PQ^2=4(x^2+y^2)$　$QR^2=(x+1)^2+y^2$　$RP^2=(x-1)^2+y^2$ を代入すると、

3式は

$$\begin{cases} 4(x^2+y^2)+(x-1)^2+y^2 > (x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \frac{1}{4} & —Ⓐ \\ 4(x^2+y^2)+(x+1)^2+y^2 > (x-1)^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \frac{1}{4} & —Ⓑ \\ (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2 > 4(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2 < 1 & —Ⓒ \end{cases}$$

解法2 ベクトルの内積

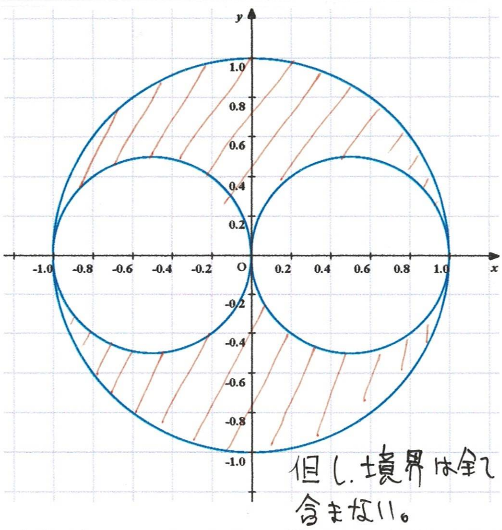
P(x,y)　Q(−x,−y)　R(1,0) より

$\overrightarrow{PQ}=(-2x,-2y)$　$\overrightarrow{PR}=(1-x,-y)$　$\overrightarrow{QR}=(1+x,y)$ である。

$$\begin{cases} \angle P < 90^\circ \Leftrightarrow \cos P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|} > 0 \\ \angle Q < 90^\circ \Leftrightarrow \cos Q > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}|} > 0 \\ \angle R < 90^\circ \Leftrightarrow \cos R > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}|\cdot|\overrightarrow{RQ}|} > 0 \end{cases}$$

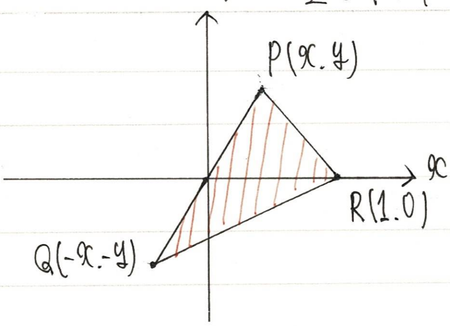
この3式にベクトルの成分を代入して整理すると、解法1と同じ条件が得られる。

条件①かつ条件②を図示すると、



但し、境界は全て含まない。

2016年　東大文系数学　第1問①



△PQRが鋭角三角形をなす条件は？

ふつう、統一的には習わない。

連想するものは…

案A. △ABCが"ただの"三角形をなす条件

$|AC-BC| < AB < AC+BC$

→ 鋭角の条件を盛り込めないので ×

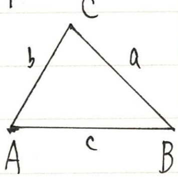
数Aの平面図形で習うよ。

角度に注目すると…

案B △ABCの∠Aが鋭角の条件

$b^2+c^2>a^2$

$\left(\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2}>0 \text{ の分子}\right)$



数I、三角比の余弦定理のところに、ちょっとだけ出てくる。

これを、∠P、∠Q、∠Rについても立式すれば立式は出来る!!

→ 部分点狙いならこれでOK.

※ 案Bの条件を思い出せるかが勝負の分かれ目。教科書の細かい所を見ておかないとダメだという、東大からのメッセージ!?

これを、△PQRにおいて立式すると、

$$\begin{cases} PQ^2+QR^2>RP^2 & \text{かつ} \\ QR^2+RP^2>PQ^2 & \text{かつ} \\ RP^2+PQ^2>QR^2 \end{cases}$$

案Bの条件を使った

三平方の定理

$PQ^2=4(x^2+y^2)$　$QR^2=(x+1)^2+y^2$　$RP^2=(x-1)^2+y^2$

なので、

3式は、

・$4(x^2+y^2)+(x+1)^2+y^2>(x-1)^2+y^2$ つまり

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$ —①

・$(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2>4(x^2+y^2)$ つまり

$x^2+y^2<1$ —②

・$(x-1)^2+y^2+4(x^2+y^2)>(x+1)^2+y^2$ つまり

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$ —③

①②③を図示すると、

2016年 東大文系数学　第1問②

$\overrightarrow{PQ} = (-2x,\ -2y)$
$\overrightarrow{QR} = (x+1,\ y)$
$\overrightarrow{RP} = (x-1\ \ y)$　である.

$\angle P$が鋭角 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} > 0$　なので.

$$(-2x,\ -2y) \cdot (-x+1,\ -y) > 0$$

$$2x(x-1) + 2y^2 > 0$$

$$x^2 - x + y^2 > 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$　となり.

これは③と同じ条件!!

以下同略