2015年　東大数学　文系第2問 ①

$P(s, t)$ とおき、$|s| \leqq 1$ として、条件(i)(ii)を考える。

(i)の条件

$y = ax^2 + bx + c$ は2次関数なので $a \neq 0$.

$(1, -1)$ を代入して、$-1 = a + b + c$
$(-1, 1)$ を代入して、$1 = a - b + c$

$$\therefore \begin{cases} a + c = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

よって、$y = ax^2 + bx + c = ax^2 - x - a$ …①

頂点を求めると

$y = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} - a$ より $\left(\frac{1}{2a}, -\frac{1}{4a} - a\right)$

よって、$\left|\frac{1}{2a}\right| \geqq 1$ から $|a| \leqq \frac{1}{2}$ …② である。

①に (s, t) を代入すると、$t = as^2 - s - a$ …③ なので、

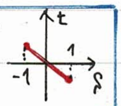
(i)の結論

$\boxed{\text{②} \Leftrightarrow |a| \leqq \tfrac{1}{2} \text{ の範囲で、③} \Leftrightarrow t = as^2 - s - a \text{ が動く領域を考える。(但し、} |s| \leqq 1,\ a \neq 0)}$

(ii)の条件

$A(-1, 1)$　$B(1, -1)$ を通る直線は $y = -x$

よって、$t = -s$ かつ $|s| \leqq 1$ を満たす領域が $P(s, t)$ の動く領域である。



(ii)の結論

ここで、③の式に $a = 0$ を代入すると、$t = 0 - s - 0$　$t = -s$ となり、(ii)の式と一致。
よって、(i)の条件のうち、$|a| \neq 0$ をなくせば、(ii)の条件を含めることができる。 ← 必須ではないが、気付くと楽

よって(i)と(ii)をまとめて、

$\boxed{t = as^2 - s - a \text{ が動く領域を } |a| \leqq \tfrac{1}{2} \text{ の条件で、} |s| \leqq 1 \text{ の範囲で求めればよい。}}$

(i)または(ii)の結論

ここから、通過領域の問題。
パラメータは a で、st 平面に図示。 a の1次関数

通過領域の解法は3つ
① 解の配置(逆像法)
② ファクシミリ論法(順像法)
③ 包絡線の利用 ← 今回は使用不可

解法1. 解の配置(逆像法)

$t = as^2 - s - a \Leftrightarrow (s^2 - 1)a = s + t$ …④

a の1次方程式が $|a| \leqq \frac{1}{2}$ に解を持てばよい。

1次方程式の解の配置は実際に解を求める。

(I) $s^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow s = \pm 1$ の時。

④ $\Leftrightarrow 0 = s + t$ より かつ $\boxed{(s, t) = (1, -1)\ (-1, 1)}$ (I)の結論

(II) $s^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < s < 1$ の時。

④ $\Leftrightarrow a = \frac{s+t}{s^2-1}$　$|a| \leqq \frac{1}{2}$ に解を持つので、

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{s+t}{s^2-1} \leqq \frac{1}{2}$$

$\times (s^2 - 1) < 0$

$$-\frac{1}{2}(s^2-1) \geqq s + t \geqq \frac{1}{2}(s^2-1)$$

$-s$

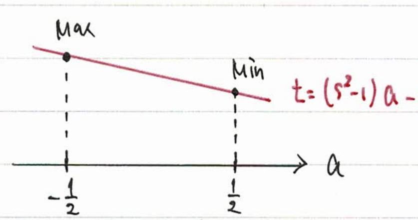
$$\boxed{-\frac{1}{2}(s^2-1) - s \geqq t \geqq \frac{1}{2}(s^2-1) - s \text{ かつ } -1 \leqq s \leqq 1}$$

(II)の結論

解法2. ファクシミリ論法(順像法)

$t = as^2 - s - a \Leftrightarrow t = \underbrace{(s^2 - 1)}_{\text{傾き}}a - s$ ◀ a の1次関数。

s を固定し、a の1次関数とみると、傾き $s^2 - 1$ について、$s^2 - 1 \leqq 0$



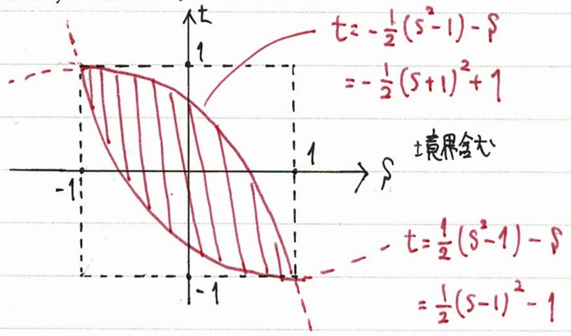
$-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ における、t の値域は

$$(s^2-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - s \geqq t \geqq (s^2-1) \times \frac{1}{2} - s$$

よって $\boxed{\frac{1}{2}(s^2-1) - s \leqq t \leqq -\frac{1}{2}(s^2-1) - s \text{ かつ } -1 \leqq s \leqq 1}$

2015年　東大数学　文系第2問②

求めた条件を図示すると、



この領域は、$t=-s$ の直線に関して対称なので、

$$(\text{求める面積}) = 2\int_{-1}^{1}\left[\left\{-\frac{1}{2}(s^2-1)-s\right\}-(-s)\right]ds$$

$$= 2\int_{-1}^{1} -\frac{1}{2}(s^2-1)\,ds$$

$\frac{1}{6}$公式で、

$$= 2\left[-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$=\frac{-1}{-6}\left(1-(-1)\right)^3$$

$=\frac{4}{3}$ としても可