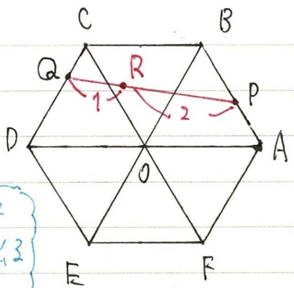
2017年 東大文系数学 第2問

$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ として.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$



基底のベクトルを、どの2本にすると、結果がキレイに出るか、わからないので、一旦 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ にしておく

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{DC}$　$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$

$= -\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$

$= \frac{1}{3}\{(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}\} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB})$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + s\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) + t \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ の点を始点として、$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ の方向と、$\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ の方向に移動するベクトル

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ なので.

$\overrightarrow{OR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + s \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + t \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

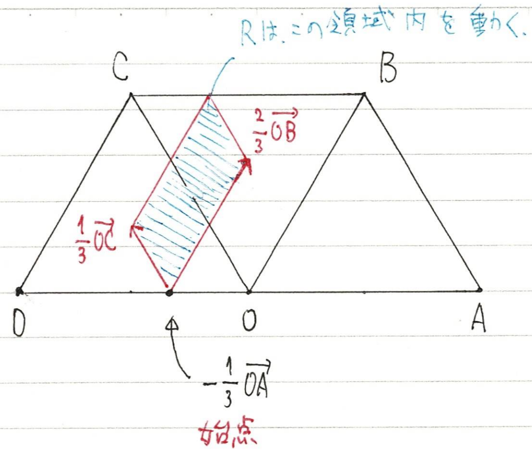
$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を基底にしてきたが、$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OB}$ $\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} と \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$ を基底にした方がわかりやすいことに気付ける

よって、$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ から.

Rは、$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ の位置を頂点として.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ と $\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ で作られる平行四辺形の周及び内部

である。



$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は $60°$ なので.

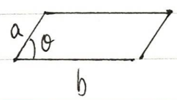
求める面積は、

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{9}$ //

$\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right|$　$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right|$

補

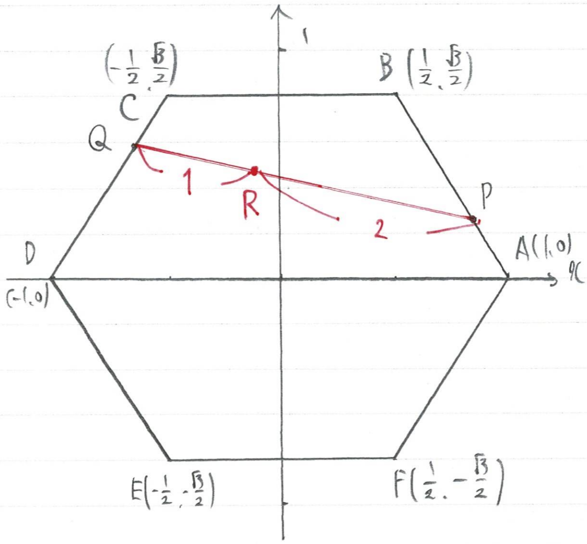
平行四辺形の面積は



$a \times b \times \sin\theta$ で求められる.

Date

2017年 東大数学 文系第2問 ②



上のように座標を設定する。

直線ABは　$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

直線CDは　$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$　なので、

PQの座標は、　$P(p, -\sqrt{3}p + \sqrt{3})$　$\frac{1}{2} \leqq p \leqq 1$

$Q(q, \sqrt{3}q + \sqrt{3})$　$-1 \leqq q \leqq -\frac{1}{2}$ とおける。

R(X, Y)はPQを2:1に内分するので

$$(X, Y) = \left(\frac{p+2q}{3}, \frac{-\sqrt{3}p + \sqrt{3} + 2(\sqrt{3}q + \sqrt{3})}{3}\right)$$

$$X = \frac{p+2q}{3} \qquad Y = \frac{-p + 2q + 3}{\sqrt{3}}$$

よって　$p + 2q = 3X$

$-p + 2q = \sqrt{3}Y - 3$

①+②より　$4q = 3X + \sqrt{3}Y - 3$

$$q = \frac{3}{4}X + \frac{\sqrt{3}}{4}Y - \frac{3}{4} \quad \cdots ①$$

①−②より　$2p = 3X - \sqrt{3}Y + 3$

$$p = \frac{3}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{3}{2} \quad \cdots ②$$

$-1 \leqq q \leqq -\frac{1}{2}$ より　①を代入して

$$-1 \leqq \frac{3}{4}X + \frac{\sqrt{3}}{4}Y - \frac{3}{4} \leqq -\frac{1}{2}$$

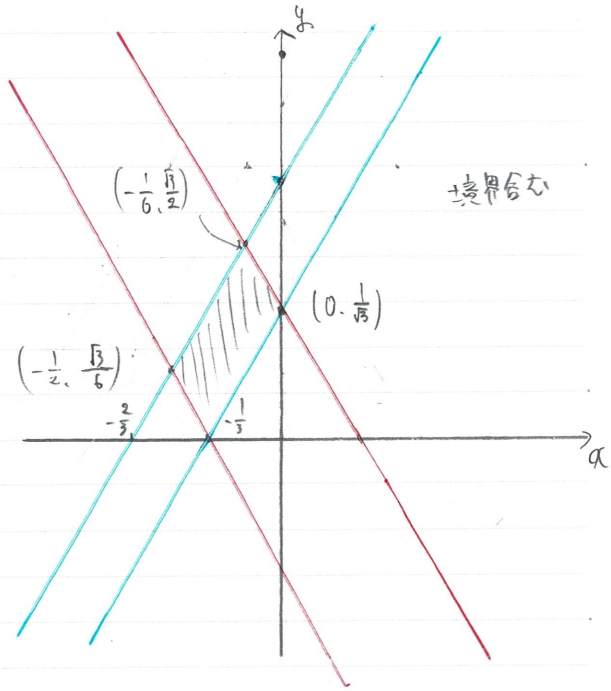
$$-\sqrt{3}X - \frac{1}{\sqrt{3}} \leqq Y \leqq -\sqrt{3}X + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots ①'$$

$0 \leqq p \leqq 1$ より　②を代入して、

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{3}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{3}{2} \leqq 1$$

$$\sqrt{3}X + \frac{1}{\sqrt{3}} \leqq Y \leqq \sqrt{3}X + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \cdots ②'$$

よって ①' ②' の領域を図示すると、下のよう。



この平行四辺形の面積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{9}$$