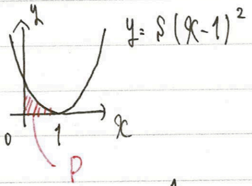
2017年 東大文系数学 第1問

3つの情報から、3本の等式を作る。

① Pの定義



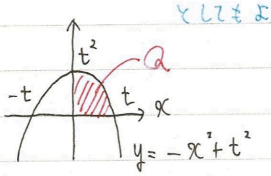
$$P=\int_0^1 s(x-1)^2\,dx=\left[\frac{s}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{s}{3}$$

$$\parallel$$

$$\int_0^1 (sx^2-2sx+s)\,dx=\left[\frac{s}{3}x^3-sx^2+sx\right]_0^1=\frac{s}{3}$$

としてもよい。

② Qの定義



$$Q=\int_0^t (-x^2+t^2)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3$$

③ AとBが1点で接する条件。　「接する」と来れば、連立して判別式0

$y=s(x-1)^2$ と $y=-x^2+t^2$ を連立して、

$$s(x-1)^2=-x^2+t^2$$
$$sx^2-2sx+s=-x^2+t^2$$
$$(s+1)x^2-2sx+s-t^2=0$$

$$(\text{判別式})/4=(-s)^2-(s+1)(s-t^2)=0$$
$$s^2-(s^2-st^2+s-t^2)=0$$
$$st^2-s+t^2=0$$

以上より　$P=\frac{s}{3}$　$Q=\frac{2}{3}t^3$　$st^2-s+t^2=0$
の3式が得られた。

よって、$st^2-s+t^2=0$　$0<s$, $0<t<1$ の条件下で

$$\frac{Q}{P}=\frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{s}{3}}=\frac{2t^3}{s}$$ の最大値を求めればよい

sとtのどちらを消去する?

(sもtも消去せず両方試す)

sを消去すると、分数関数になるかも…

tを消去すると無理関数($\sqrt{\ }$の関数)になるかも…

悩んだら、両方やってみれば良い。　$t^2(s+1)=s$

今回はsを消去するのが正解　$t=\pm\sqrt{\frac{s}{s+1}}$

$$st^2-s+t^2=0 \iff s=\frac{-t^2}{t^2-1}\quad (\because t\neq\pm1)\text{ より}$$

$$\frac{Q}{P}=\frac{2t^3}{s}=\frac{2t^3}{\frac{-t^2}{t^2-1}}=-2t(t^2-1)$$

分数が消えて3次関数になった!!

より、$f(t)=-2t(t^2-1)$ とおくと、

$0<t<1$ での $f(t)$ の最大値を求めればよい。

あとはただの3次関数の問題。

$$f'(t)=(-2t^3+2t)'$$
$$=-6t^2+2$$
$$=-2(3t^2-1)$$

増減表は、

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	極大	↘	

なので、

最大値は $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1\right)$

$$=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\ /\!/$$

ちなみに、

$$s=\frac{-t^2}{t^2-1}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{2}$$ で $0<s$ をみたす。