2016年　東大文系数学　第4問

(1) 10で割った余り ⇒ mod 10 で計算

$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$

$3^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$　mod 10 で、9や1が見つかった瞬間、繰り返しが決定!! 周期は $2^2=4$

↓2乗

$3^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$

よって、3^n は周期4の繰り返しになっている

(ちなみに、$3^3 \equiv 3\times 3^2 \equiv 3\times(-1) \equiv -3 \equiv 7 \pmod{10}$)

よって、

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n\text{を4で割った余りが}1\text{の時}) \\ 9 & (\quad : \quad 2 \quad :) \\ 7 & (\quad : \quad 3 \quad :) \\ 1 & (\quad : \quad 0 \quad :) \end{cases}$$

(3)では最終的にココしか使わない

(2) 4で割った余りは、mod 4.

$3^1 \equiv 3 \equiv -1 \pmod{4}$　これも、mod 4に対して余りが3なので、繰り返し決定!! 周期は2.

↓2乗

$3^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{4}$　よって、

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n\text{が奇数の時}) \\ 1 & (n\text{が偶数の時}) \end{cases}$$

(3) すぐにわからなければ、試してみよう。

(1)より　3^n を10で割った余りを知るには n を4で割った余りがわかれば良い。(※)

$x_1 = 1$　よって10で割った余りは1

$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3$　よって10で割った余りは3

$x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27$　よって　:　7

ここまでは簡単…

というか、計算してるヒマがない

$x_4 = 3^{27}$　具体的な値はわからない。

(※)より、27を4で割った余りがわかればよい。

つまり 3

よって、(1)より　$3^{(4\text{でわった余り}3)}$ なので、7

$x_5 = 3^{x_4} = 3^{3^{27}}$　ここを4で割った余りが知りたい。

3^{27} 奇数。を4で割った余りは、(2)より 3

よって、x_5 を10で割った余りは 3^3 と等しく7.

これと同じことを、x_{10} でも行えばOK.

$x_{10} = 3^{x_9} = 3^{3^{x_8}}$　ここを4で割った余りを知りたい

なので、

3^{x_8} を4で割った余りを調べる。

ここの偶奇が知りたい。

3^{x_8} を4で割った余りは、x_8 の偶奇がわかればよい。

$x_8 = 3^{x_7}$ なので、x_7 がどんな整数でも x_8 は奇数。($x_8 = \underbrace{3\times 3\times 3\times \cdots \times 3}_{x_7\text{個}}$)

よって、3^{x_8} を4で割った余りは $3^{(\text{奇数})}$ なので3

$x_{10} = 3^{x_9}$ を10で割った余りは 3^3 と等しく7.

よって7 //

まとめると…

$x_{n+1} = 3^{x_n}$, $x_1 = 1$ より x_n は全て奇数。

よって、$n \geq 2$ の時、x_n は4で割ると3余る((2)より)

よって、$n \geq 3$ の時、x_n は10で割ると7余る((1)より)

よって、x_{10} も10で割ると余りは7

だけで解答が終わるが、前述のように色々で試してOK.