2015 東大文系数学 第1問 ①

命題A.

$\boxed{\text{不等式の証明} — (\text{左辺})-(\text{右辺}) \quad \backslash\ \text{特殊不等式}}$

$h(x)=f(x)-g(x)$ も含む

相加の相乗
コーシーシュワルツ
消不等式
など

$$\frac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$$

↓ 分母を払い.

$$\Leftrightarrow\ n^3+2600 \geqq 26n^2$$

↓ (左辺)−(右辺)

$$\Leftrightarrow\ n^3-26n^2+2600 \geqq 0$$

なので. $n^3-26n^2+2600 \geqq 0$ の真偽を調べても OK.

$\boxed{\text{真偽の判定は. 反例の有無}}$

$n^3-26n^2+2600<0$ となる n があれば 偽である

よって n^3-26n^2+2600 の最小値を探す。

n^3-26n^2+2600 は3次式なので.

$f(x)=x^3-26x^2+2600$ とおいて. グラフを描く

但し. nは整数で. xは実数なので. 実際には. 整数の値だけ調べることになる.

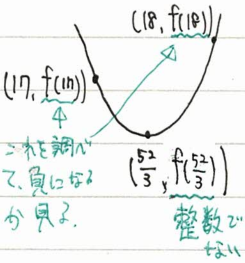
$$f'(x)=3x^2-52x=x(3x-52)$$

増減表は.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(\frac{52}{3})$	$\nearrow$

よって. $x>0$ では. $f(\frac{52}{3})$ が最小値。

$\frac{52}{3}$ の付近の. x座標が 整数 の場所を調べればよい



$17<\frac{52}{3}<18$ なので. $f(17)$, $f(18)$ の値を調べると.

$$f(17)=17^3-26\times17^2+2600$$
$$=\cdots=-1<0 \quad \text{発見!!}$$

$f(17)<0 \Leftrightarrow \frac{17^3}{26}+100 \geqq 17^2$ なので. 反例を発見!

これを踏まえて. 解答を作ると.

$\boxed{\text{命題Aの真偽は偽である。}}$

反例は $n=17$

$$\left(\begin{array}{l} 17^3-26\times17^2+2600=-1<0 \\ \Leftrightarrow\ 17^3+2600 < 26\times17^2 \\ \Leftrightarrow\ \frac{17^3}{26}+100 < 17^2 \quad \text{であるため} \end{array}\right)$$

下の3行は書かなくても良いかも

これを解答欄に書けばよい

となる。

$\boxed{\text{別解}}$ あくまで. 整数として. 微分の定義式と比較してみよう。

$\boxed{\text{(補) 整数の整式の増減は} \quad \frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=f(n+1)-f(n) \ \text{を調べる。}}$

$f'(x)$ の代わりの式

$f(n)=n^3-26n^2+2600$ として.

$f(n+1)-f(n)$

$$=(n+1)^3-26(n+1)^2+2600-(n^3-26n^2+2600)$$
$$=3n^2-49n-25 \quad \leftarrow f'(x)\text{のような式}$$

$3n^2-49n-25=0$ を解くと.

$$n=\frac{49\pm\sqrt{49^2+300}}{6}=\frac{49\pm\sqrt{2701}}{6}$$

$\sqrt{2500}=50$ を目安にする。

$51=\sqrt{2601}<\sqrt{2701}<\sqrt{2704}$ なので.

$$n \fallingdotseq \frac{49\pm52}{6}=-\frac{1}{2},\ 16.8\cdots$$

$$\begin{cases} 0<n\leqq16 \text{のとき} & f(n+1)-f(n)<0 \Leftrightarrow f(n)>f(n+1) \\ 17\leqq n \text{のとき} & f(n+1)-f(n)>0 \Leftrightarrow f(n)<f(n+1) \end{cases}$$

増減がわかった。

よって. $f(1)>f(2)>\cdots>f(17)<f(18)<f(19)<\cdots$

最小値

ここで.

$f(17)=-1<0$ より. 反例があった。

よって. 偽

Date . . No.

2015 東大文系数学 第1問 ②

命題B.

$5n+5m+3l=1 \iff 3l=1-5m-5n$ より

$10nm+3ml+3nl$

$=10nm+3l(m+n)$

$=10nm+(1-5n-5m)(m+n)$

$=\cdots$

$=m+n-5m^2-5n^2$

$=m-5m^2+n-5n^2$ ―(※)

mと$5m^2$は、$5m^2$の方が大きそうだっていうのはわかると思うので、あとは示すだけ。

有名不等式
$|m| \geqq 1$の時 $m \leqq m^2$

ちょっと変形して利用します。

(i) $m=0$ $n=0$の時、$5\times0+5\times0+3l=1$となり $l=\frac{1}{3}$ これは、lが整数でないので不適。

$m=0$や$n=0$の可能性を排除

(ii) $m\neq0$の時、mは整数なので、

$|m|\geqq1$である。

よって $m^2\geqq m$である。

すると、$m\leqq m^2<5m^2$なので、

$m-5m^2<0$である。

$n\neq0$の時も同様に $n-5n^2<0$

以上より(※)の式は

$m-5m^2+n-5n^2<0$である。

よって、命題Bは真である。

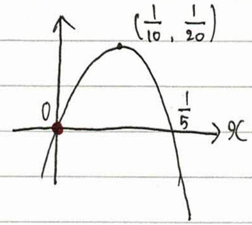
補足1

(※)の証明は、次のようにしても可

$m-5m^2<0$を言いたいから、$m-5m^2$の最大値を考える。

$f(x)=x-5x^2$のグラフは

$f(x)=-5(x^2-\frac{1}{10})^2+\frac{1}{20}$ なので、



x座標が整数の中で最も$f(x)$が大きいのは$x=0$で$f(0)=0$だが、$x=0$の場合は(i)で除外されるので、$f(x)<0$

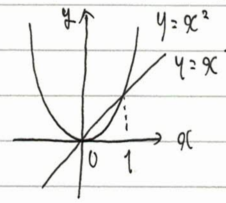
よって $m\neq0$の整数mで、$m-5m^2<0$である。

補足2.

$|m|\geqq1$の時、$m\leqq m^2$について。

厳密に言うと、
$0<x<1$ で $x>x^2$
$x<0,\ 1<x$ で $x<x^2$

証明は、グラフを見れば一目瞭然



他にも、

- $m<0$の時、$m^2\geqq0$なので $m<m^2$
- $m>1$の時 $m=m\times1<m\times m=m^2$ $\therefore m<m^2$

としても可。