Date . . No.

2017年 東大文系数学 第4問 理系数学 第4問 その1.

計算を簡単にするため、$p=2+\sqrt{5}$ に対し、

$q=-\frac{1}{p}=-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とする。

$-\frac{1}{p}$ を計算すると、p と共役になるので、対称式の発想を得る。

$$\begin{cases} p+q=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4 \\ pq=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1 \end{cases}$$ である。

基本対称式の値を求めた。

(1) $a_1=p^1+q^1=4$〃

$a_2=p^2+q^2=(p+q)^2-2\cdot p\cdot q=4^2+2=18$〃

(2) $a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)$

これは"上手い"変形。思いつかないかもしれない。

(1)で $a_1=4$ を求めているので、$p+q$ でなく、4を代入した人も多いはず。

$=p^{n+1}+pq^n+qp^n+q^{n+1}$

$=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

$=a_{n+1}-a_{n-1}$〃

面倒だが、確実に求められる方法を紹介しておく。

$\boxed{\text{別解}}$

$$\begin{cases} a_{n+1}=p^{n+1}+q^{n+1} \\ a_{n-1}=p^{n-1}+q^{n-1} \end{cases}$$

$a_n=p^n+q^n$ の p^n と q^n に、a_{n+1} と a_{n-1} の式を代入する方針。

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=p\cdot p^n+q\cdot q^n \\ a_{n-1}=\frac{1}{p}p^n+\frac{1}{q}q^n \end{cases}$$

◀ p^n と q^n を作っておく

↓ $pq=-1$ より $\begin{cases} \frac{1}{p}=-q \\ \frac{1}{q}=-p \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=p\cdot p^n+q\cdot q^n \\ a_{n-1}=-q\,p^n-p\cdot q^n \end{cases} \quad (※)$$

p^n と q^n の連立方程式。加減法で攻める。

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p\cdot a_{n+1}=p^2\cdot p^n+pq\cdot q^n \\ q\,a_{n-1}=-q^2\cdot p^n-pq\cdot q^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p\cdot a_{n+1}=p^2\cdot p^n-1\cdot q^n \\ q\cdot a_{n-1}=-q^2\cdot p^n+1\cdot q^n \end{cases}$$

↓辺々足す

$p\cdot a_{n+1}+q\,a_{n-1}=(p^2-q^2)\cdot p^n$

$\therefore p^n=\frac{1}{p^2-q^2}\cdot(p\cdot a_{n+1}+q\,a_{n-1})$ —①

(※)で、(上の式)×q (下の式)×p とすると、

$$\begin{cases} q\cdot a_{n+1}=q\cdot p\cdot p^n+q^2\cdot q^n \\ p\cdot a_{n-1}=-p\cdot q\cdot p^n-p^2\cdot q^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q\cdot a_{n+1}=-1\cdot p^n+q^2\cdot q^n \\ p\cdot a_{n-1}=1\cdot p^n-p^2\cdot q^n \end{cases}$$

↓辺々足す

$q\cdot a_{n+1}+p\cdot a_{n-1}=(q^2-p^2)\,q^n$

$\therefore q^n=\frac{1}{q^2-p^2}(q\,a_{n+1}+p\,a_{n-1})$ —②

①と②を、$a_n=p^n+q^n$ に代入。

$a_n=\frac{1}{p^2-q^2}(p\cdot a_{n+1}+q\,a_{n-1})+\frac{1}{q^2-p^2}(q\cdot a_{n+1}+p\cdot a_{n-1})$

$(p^2-q^2)\,a_n=p\cdot a_{n+1}+q\,a_{n-1}-(q\,a_{n+1}+p\cdot a_{n-1})$

$(p^2-q^2)\,a_n=(p-q)\,a_{n+1}+(q-p)\,a_{n-1}$

↓ $p-q$ で両辺を割る。

$(p+q)\,a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

↓ $p+q=a_1$

$\therefore a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$〃

メッセージ.

計算は面倒で、賢い方法ではないかも知れないけど、確実に出せる方法を持っておくのは大事。

2017年　東大 文系数学　第4問　　理系数学　第4問　　その2.

(3) 自然数で、証明と来たら、帰納法

以下、数学的帰納法により、証明する。

(i) $a_1 = 4$ より、自然数である。
　$a_2 = 18$ より 自然数である。

(ii) $a_k = m_1$　$a_{k+1} = m_2$　(但し、m_1, m_2 は自然数)
となると仮定し、
a_{k+2} が自然数となることを示す。

(2) の結果、$a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ より

$4 \cdot a_{k+1} = a_{k+2} - a_k$
$\Leftrightarrow$ $a_{k+2} = 4a_{k+1} + a_k$ である。

$a_k = m_1$　$a_{k+1} = m_2$ を代入すると、
$a_{k+2} = 4m_2 + m_1$ であり、
a_{k+2} も自然数である。

よって、すべての自然数 n において、a_n は自然数である。

↑ いわゆる"強化帰納法"を用いた。

(4) $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$ であるが、

これは、a_{n+1} を a_n で割ると、商が4で 余りが a_{n-1} であることを意味する。

すると、ユークリッドの互除法により、
a_{n+1} と a_n の最大公約数は、
a_n と a_{n-1} の　〃　に等しい。

これを繰り返すと、a_{n-1} と a_{n-2} の最大公約数と等しく、… となり、結局、a_2 と a_1 の最大公約数と等しくなる。

a_2 と a_1 の最大公約数は、2 なので、求めるものは 2.

最大公約数は、数IA、IIB、III 含めて、
数Aの整数分野にしか出ない。
メインは、ユークリッドの互除法だし、
普段から、大きい数の最大公約数を、
帰納的に、小さい数の最大公約数にして、
計算している。
数列でも同じことが出来る。