2014年　東大 文系数学 第1問

(1)

$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$

↓ f(x)の最大値なので、xで降べきの順

$f(x) = -2x^2 + (8t-12)x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$

↓ xの2次関数なので、平方完成

$f(x) = -2\{x^2 - (4t-6)x\} + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$

$= -2\{x - (2t-3)\}^2 + 2(2t-3)^2 + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$

$= -2\{x - (2t-3)\}^2 + t^3 - 9t^2 + 15t$

よって $x = 2t-3$ の時、最大値 $t^3 - 9t^2 + 15t$ //

(2)

$g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$ である。

g(t)は3次関数で、
$t \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の定義域、
⇒ ビブン

$g'(t) = 3t^2 - 18t + 15$
$= 3(t^2 - 6t + 5)$
$= 3(t-1)(t-5)$

増減表は

t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		5	
$g'(t)$		+	0	−	0	+
$g(t)$		↗	極大	↘	極小	↗

よって $t \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ での、$g(t)$ の最小値は、

$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ か $g(5)$ のどちらか。

$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 9\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 15\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cdots = -\frac{31\sqrt{2}+18}{4}$

$g(5) = 5^3 - 9 \times 5^2 + 15 \times 5 = -25$

$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - g(5) = -\frac{31\sqrt{2}+18}{4} - (-25)$

$= \frac{-31\sqrt{2} - 18 + 100}{4}$

$= \frac{82 - 31\sqrt{2}}{4}$

↓ $\sqrt{2} < 2$ より

$> \frac{82 - 31 \times 2}{4}$

$= \frac{20}{4} = 5 > 0$

ゆえに、$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > g(5)$

以上より、$g(t)$ の $t \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ での最小値は -25 //