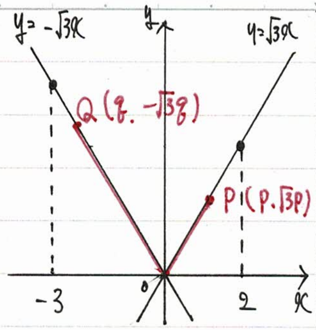
Date

2014年　東大数学　文系第3問①

(1) 右図のように点P, Qを設定する。

但し、$0 \leqq p \leqq 2$、$-3 \leqq q \leqq 0$ …①



$OP = \sqrt{p^2+(\sqrt{3}p)^2} = 2p$

$OQ = \sqrt{q^2+(-\sqrt{3}q)^2} = -2q$ なので、

$OP + OQ = 6 \iff p - q = 3$ …②

直線PQの方程式は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{\sqrt{3}p-(-\sqrt{3}q)}{p-q}(x-p)$$ であり、

(s, t) がこの上にあるので、

$$t - \sqrt{3}p = \frac{\sqrt{3}(p+q)}{p-q}(s-p) \quad \cdots ③$$ ← ③だけだと直線。

また、仮定より $-3 \leqq s \leqq 2$ …④

(s, t) は線分PQ上なので、$q \leqq s \leqq p$ ⑤ ← ③かつ⑤とすると線分上になる

以上で、各条件の立式が終了。

求めたいことを整理すると…

$$\begin{cases} 0 \leqq p \leqq 2 \\ -3 \leqq q \leqq 0 \end{cases} \text{—①} \qquad -3 \leqq s \leqq 2 \text{ —④}$$

$$p - q = 3 \text{ —②} \qquad q \leqq s \leqq p \text{ —⑤}$$

の束縛条件の下で、

$$t - \sqrt{3}p = \frac{\sqrt{3}(p+q)}{p-q}(s-p) \quad \text{—③}$$

が通過する領域をst平面(xy平面)に図示する。

① まず、$0 \leqq p \leqq 2$、$-3 \leqq q \leqq 0$、$p - q = 3$ から、

pとqの範囲を求める。

$\boxed{\text{解法1}}$ 式変形でpの範囲を求める(qを消去)

$q = p - 3$ を代入し、

$-3 \leqq p - 3 \leqq 0 \iff 0 \leqq p \leqq 3$

$0 \leqq p \leqq 2$ かつ $0 \leqq p \leqq 3$ なので、$\underline{0 \leqq p \leqq 2}$

パラメータを消去して、pに統一(qは消去)したいとき、これを使う。

$\boxed{\text{解法2}}$ 式変形でqの範囲を求める(pを消去)

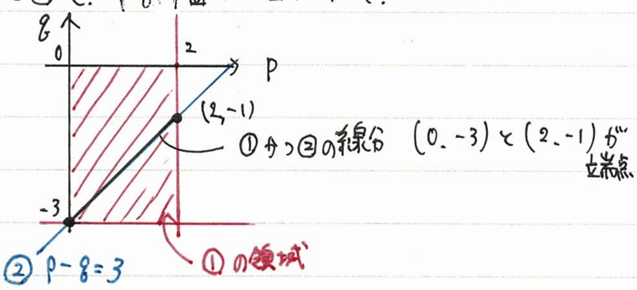
$p = q + 3$ を代入して、$0 \leqq q + 3 \leqq 2 \iff -3 \leqq q \leqq -1$

$-3 \leqq q \leqq 0$ かつ $-3 \leqq q \leqq -1$ なので、$\underline{-3 \leqq q \leqq -1}$

qに統一したいときは、これを使う。

$\boxed{\text{解法3}}$ 領域図示で、pとqの範囲を求める。

①と②を、pq平面に図示すると、



※ この線分((0, −3)と(2, −1)が端点)をp, qの範囲で表すと、

$0 \leqq p \leqq 2$、$-3 \leqq q \leqq -1$ となり、解法1や2と一致。

なので、2文字のパラメータの範囲設定は、領域図示がオススメ

下準備はおわり。

次からは、通過領域の解法を

1、解の配置(逆像法) ← 解法4

2、ファクシミリ論法(順像法) ← 解法5

3、包絡線の利用 ← 解法5

から選んで進める局面に移る。

2014年　東大数学　文系第3問 ②（解の配置）

解法4 解の配置

パラメータで降べきの順で並べて、

パラメータが解を少なくとも1つ持つ条件をもとめる。

pとqの2文字があるが、Ⓐ両方残す、Ⓑpを残す

Ⓒqを残す の3つから選択。（今回はⒸは割愛）

（解法A）

③のグラフが、解法3の線分と交点を持てばよい。

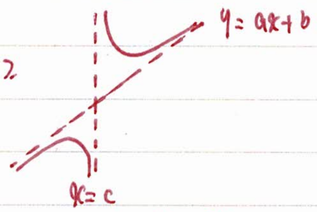
③ ⇔ $q = \frac{3s-\sqrt{3}t}{p-s} - p + 3$

これは、$y = \frac{d}{x-c} + ax + b$ のグラフで、

数Ⅲの範囲で描ける。

$y = \frac{d}{x}$ をx軸方向に+c動かした反比例のグラフと、$y = ax+b$ の直線の和

例えばこんなグラフ



これと、解法3のグラフと交点を持つ条件は、とても複雑なので、ここで断念。

（解法B）

qを消し、pを残すので、解法1を利用。

pの範囲は、$0 \leqq p \leqq 2$.

③ ⇔ $2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 0$

$f(p) = 2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t$ とおく。

軸の方程式は $p = \frac{s+3}{2}$

Q 次に、$0 \leqq p \leqq 2$ と $q \leqq s \leqq p$ ⑤ から pについて検討する範囲をもとめる。

解法a 式で計算

$q = p-3$ を $q \leqq s \leqq p$ に代入して、$p-3 \leqq s \leqq p$

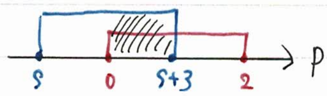
⇔ $s \leqq p \leqq s+3$ なので、

$0 \leqq p \leqq 2$ かつ $s \leqq p \leqq s+3$ で場合分けをする。

(i)

右図のように、

$0 \leqq s+3 \leqq 2$ ⇔ $-3 \leqq s \leqq -1$ のとき、



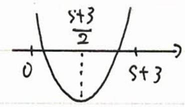
$0 \leqq p \leqq s+3$ である。

軸：$p = \frac{s+3}{2}$ なので、ちょうど中央に軸がある。

よって、$0 \leqq p \leqq s+3$ に解を持つ条件は、

$f(0) \geqq 0$ かつ $f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0$　(i)の結論

（または、$f(s+3) \geqq 0$ かつ $f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0$ でも可）



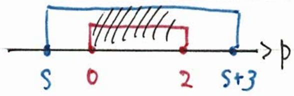
(ii)

右図のように、

$s \leqq 0$ かつ $2 \leqq s+3$

⇔ $-1 \leqq s \leqq 0$ のとき、

$0 \leqq p \leqq 2$ である。

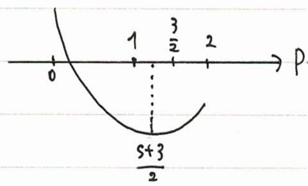


軸の位置は $\frac{-1+3}{2} \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{0+3}{2}$ ⇔ $1 \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{3}{2}$ なので、

$0 \leqq p \leqq 2$ に解を持つ条件は、

$f(0) \geqq 0$ かつ $f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0$

(ii)の結論

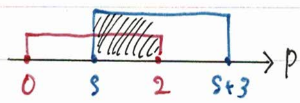


(iii)

右図のように、

$0 \leqq s \leqq 2$ のとき、

$s \leqq p \leqq 2$ である。



軸の位置は、$\frac{0+2}{2} \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{2+3}{2}$ ⇔ $1 \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{5}{2}$

$0 \leqq p \leqq 2$ の範囲の内と外があるので、さらに場合分け

(iii−1) $\frac{s+3}{2} \leqq 2$ ⇔ $s \leqq 1$ かつ $0 \leqq s \leqq 2$

つまり $0 \leqq s \leqq 1$ の場合、と、

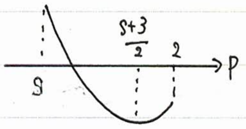
(iii−2) $2 \leqq \frac{s+3}{2} \leqq \frac{5}{2}$ ⇔ $1 \leqq s \leqq 2$ かつ $0 \leqq s \leqq 2$

つまり $1 \leqq s \leqq 2$ の場合にわける。

2014年　東大数学　文系第3問③（解の配置）

(iii-1)　$0 \leqq s \leqq 1$ の場合.

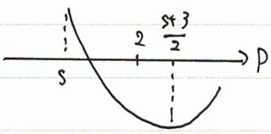
$s \leqq p \leqq 2$ で解を持つには.



$f(s) \geqq 0$ かつ $f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0$　(iii-1)の結論

(iii-2)　$1 \leqq s \leqq 2$ の場合.

$s \leqq p \leqq 2$ で解を持つには.



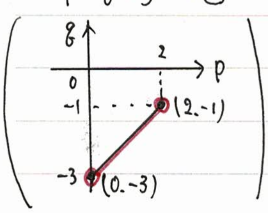
$f(s) \geqq 0$ かつ $f(2) \leqq 0$　(iii-2)の結論

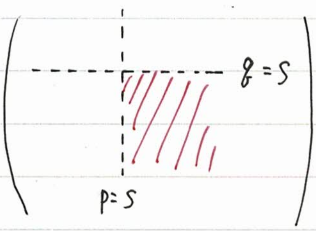
解法b

領域を利用して. (i)〜(iii)の場合分けを考察できる。

$$\begin{cases} 0 \leqq p \leqq 2 \\ -3 \leqq q \leqq 0 \end{cases} \text{—①} \quad と \quad q \leqq s \leqq p \text{—⑤}$$

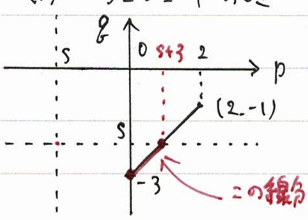
$p - q = 3$ —②





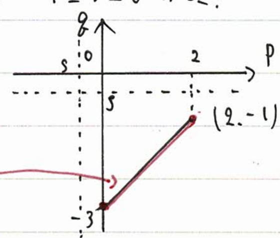
の領域を結合する。

(i)　$-3 \leqq s \leqq -1$ のとき



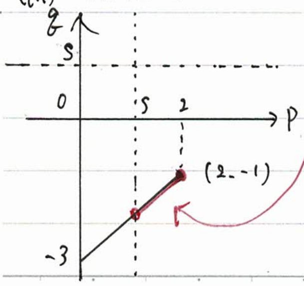
上図より　$0 \leqq p \leqq s+3$

(ii)　$-1 \leqq s \leqq 0$ のとき.



上図より　$0 \leqq p \leqq 2$.

(iii)　$0 \leqq s \leqq 2$ のとき



左図より

$s \leqq p \leqq 2$.

(i)〜(iii)の解をまとめると.

$$\begin{cases} -3 \leqq s \leqq -1 \text{ のとき.} & f(0) \geqq 0 \text{ かつ } f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0 \\ -1 \leqq s \leqq 0 \text{ のとき.} & f(0) \geqq 0 \text{ かつ } f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0 \\ 0 \leqq s \leqq 1 \text{ のとき.} & f(s) \geqq 0 \text{ かつ } f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0 \\ 1 \leqq s \leqq 2 \text{ のとき.} & f(s) \geqq 0 \text{ かつ } f(2) \leqq 0 \end{cases}$$

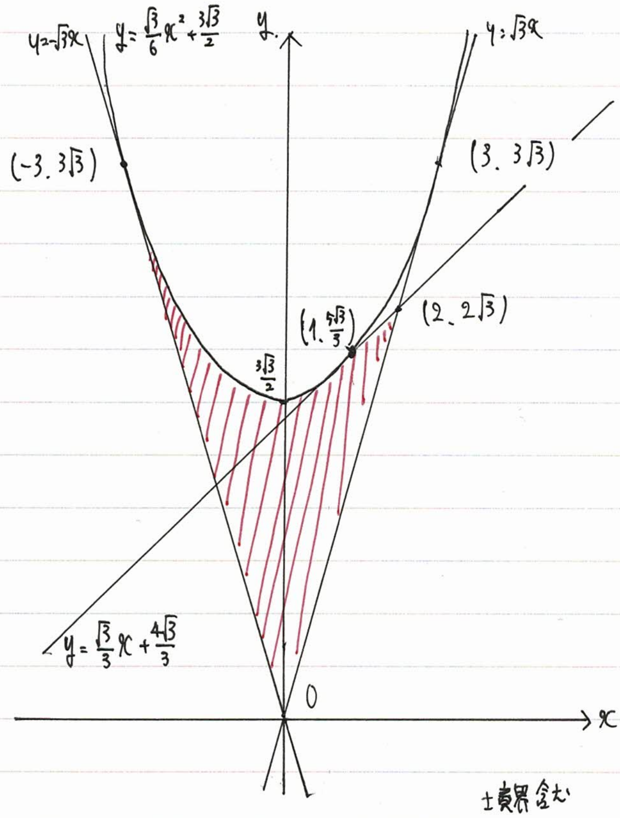
$f(0) \geqq 0 \iff t \geqq -\sqrt{3}s$

$f\left(\frac{s+3}{2}\right) \leqq 0 \iff t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f(s) \geqq 0 \iff t \geqq \sqrt{3}s$

$f(2) \leqq 0 \iff t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3}$　　なので 図示すると.

(2)



境界含む

2014年　東大数学　文系第3問④（ファクシミリ論法）

$\boxed{解法5}$ ファクシミリ論法

xを固定し、$y=$（パラメータの降べきの順）と変形する。
（今回は、sを固定し、$t=$（パラメータの降べきの順）とする）
yの値を求めて、領域に図示する。

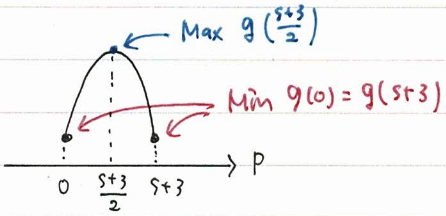
③より　$t=\dfrac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}(s-p)+\sqrt{3}p$　③に$q=p-3$を代入した。

右辺を$g(p)$とすると、

$$t=g(p)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}(s+3)p-\sqrt{3}s$$
$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

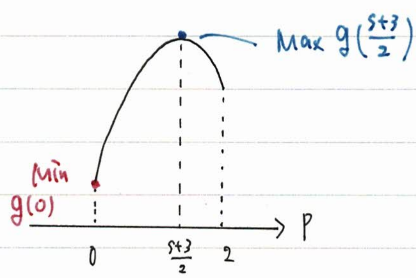
これに対し、解法4と同様に場合分けをする。← pを残しqを消去したから
詳しい場合分けは、解法4を参照

(i) $-3\leqq s\leqq -1$ のとき、$0\leqq p\leqq s+3$ である。



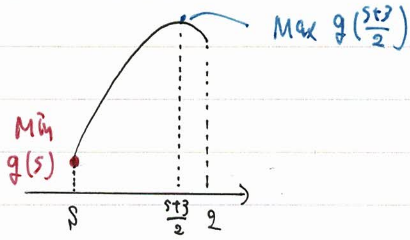
よって、$g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ である。
（$g(s+3)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ でも可）

(ii) $-1\leqq s\leqq 0$ のとき、$0\leqq p\leqq 2$ である。
軸の位置は、$1\leqq\frac{s+3}{2}\leqq\frac{3}{2}$ なので、



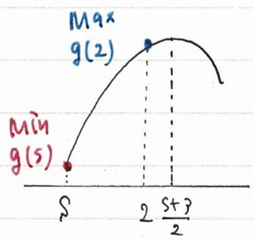
よって、$g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ である。

(iii-1) $0\leqq s\leqq 1$ のとき、$s\leqq p\leqq 2$ である。
軸の位置は、$\frac{3}{2}\leqq\frac{s+3}{2}\leqq 2$ なので、



よって、$g(s)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ である

(iii-2) $1\leqq s\leqq 2$ のとき、$s\leqq p\leqq 2$ なので、
軸の位置は、$2\leqq\frac{s+3}{2}\leqq\frac{5}{2}$



よって　$g(s)\leqq t\leqq g(2)$ である。

まとめると、

$$\begin{cases} -3\leqq s\leqq -1 \text{ のとき} & g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right) \\ -1\leqq s\leqq 0 \text{ のとき} & g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right) \\ 0\leqq s\leqq 1 \text{ のとき} & g(s)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right) \\ 1\leqq s\leqq 2 \text{ のとき} & g(s)\leqq t\leqq g(2) \end{cases}$$

$g(0)=-\sqrt{3}s$　$g(s)=\sqrt{3}s$　$g(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}$
$g\left(\frac{s+3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

図示は、（省略）

2014年　東大数学　文系第3問⑤　(包絡線)

$\boxed{\text{解法6}}$ 包絡線の利用

パラメーターで降べきの順に並べる。

パラメータで微分する。

微分前と微分後を連立する。

絶対ではない。

ここまでは、解の配置と同じ

③ $\Leftrightarrow$ $2p^2-2(s+3)p+3s+\sqrt{3}t=0$

解法Bと同じような開始。

$f(p)=2p^2-2(s+3)p+3s+\sqrt{3}t$ とおくと、

$f'(p)=4p-2(s+3)$ である。

$f(p)=0$ と $f'(p)=0$ を連立する。

$f'(p)=0$ から、　$s=2p-3$ ← これが接点。

$f(p)=0$ に代入して、

$$2\times\left(\frac{s+3}{2}\right)^2-2(s+3)\times\frac{s+3}{2}+3s+\sqrt{3}t=0$$

$$\therefore\ t=\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ ← 接する曲線。

よって、③の直線(線分)は $t=\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ に $s=2p-3$ で常に接することがわかった。

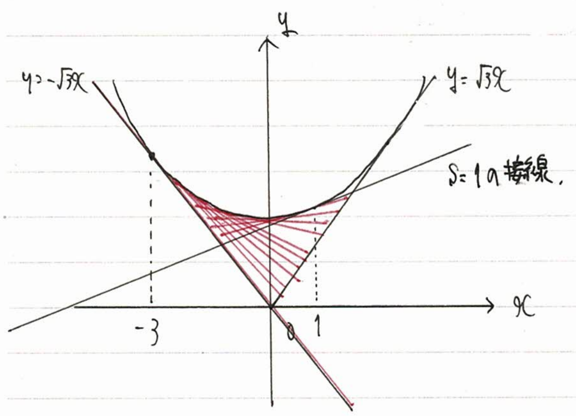
$0\leqq p\leqq 2$ より

$-3\leqq s=2p-3\leqq 1$ なので、

接点は $-3\leqq s\leqq 1$ である。

よって $t=\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ に接する直線を

接点 $-3\leqq s\leqq 1$ で動かすので、



2014年　東大数学　文系第3問 ⑥　（直線 → 線分）

別解

線分PQ だと面倒なので、直線PQ で領域を求めてしまう。

つまり、

$\begin{cases} 0 \leqq p \leqq 2 \\ -3 \leqq q \leqq -1 \end{cases}$ ― ①

$p - q = 3$ ― ②

$t - \sqrt{3}p = \dfrac{\sqrt{3}(p+q)}{p-q}(s - p)$ ― ③　に対し、

③が ①かつ② の条件下で動く領域を、まず求める。

解法1より

① と ② は $0 \leqq p \leqq 2$ とでき、

③ は $2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 0$ なので、

$h(p) = 2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 0$ が

$0 \leqq p \leqq 2$ に解を持つ条件を求める。

(i) $h(0) = 0$　$p=0$ に解をもつ

(ii) $h(2) = 0$　$p=2$ に解をもつ　以下、$0 < p < 2$ とすると、

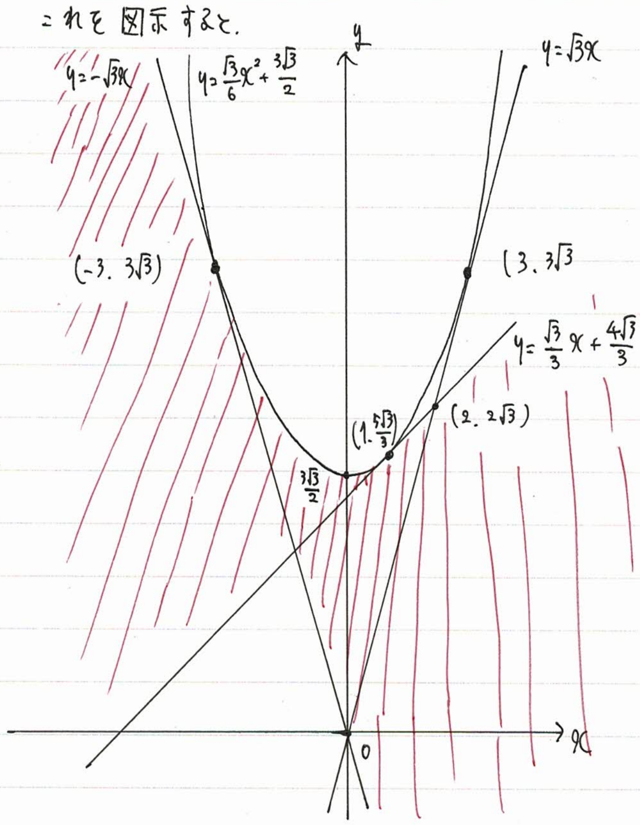
(iii) $D/4 > 0$, $0 <$ 軸 < 2, $h(0) > 0$, $h(2) > 0$　$0 < p < 2$ に異なる2解

(iv) $D/4 = 0$, $0 <$ 軸 < 2　$0 < p < 2$ に重解

(v) $h(0) \times h(2) < 0$　$0 < p < 2$ に1解

※ (iii) と (iv) は $\begin{cases} D/4 \geqq 0 \\ 0 < \text{軸} < 2 \\ h(0) > 0 \\ h(2) > 0 \end{cases}$ とまとめられる。

これを図示すると、



であるが、

このうち、$y \geqq \sqrt{3}x$ かつ $y \geqq -\sqrt{3}x$ の部分だけ残すと、線分PQ の通過領域になる。

直線の領域を線分の領域へ。