2016年 東大文系数学　第2問

まずは法則を見つけよう!!

① 1試合目でAが勝つ時、勝者が、

$\boxed{AA}$ となったら Aの優勝　(2試合目)

次にAが優勝するパターンは、

$\boxed{ACB}\boxed{AA}$　(5試合目)

その次は

$\boxed{ACB}$.$\boxed{ACB}$ $\boxed{AA}$　(8試合目)

このように、$\boxed{ACB}$ が何度か繰り返されて $\boxed{AA}$ となり優勝するパターンしかない。

($k=1.2.3\cdots$ とすると $3k-1$ 試合目)

② 1試合目でBが勝つ時は、

$\boxed{BCA}\boxed{A}$ が最短でAの優勝 (4試合目)

次の優勝パターンは

$\boxed{BCA}\boxed{BCA}\boxed{A}$　(7試合目)

で、次は

$\boxed{BCA}$ $\boxed{BCA}$ $\boxed{BCA}\boxed{A}$　(10試合目)

このように、$\boxed{BCA}$ が何度か繰り返されて、$\boxed{A}$ となり、優勝するパターンしかない。

($k=1.2.3\cdots$ とすると $3k+1$ 試合目)

この2つのルールを掴んだら、あとは計算するだけ

(1) Aが5試合目で優勝するのは、ルール① より、

$\boxed{ACB}\boxed{AA}$ となるときだけ。よって、

$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ //

(2) (i) $n=3k-1$ の時 (ルール①の時)

$\boxed{ACB}$ $\boxed{ACB}$ $\boxed{ACB}\cdots\boxed{ACB}\boxed{AA}$ となる

n試合目

ので、$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ii) $n=3k+1$ の時 (ルール②の時)

$\boxed{BCA}\boxed{BCA}\boxed{BCA}\cdots\boxed{BCA}\boxed{A}$ となるので、

n試合目

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(iii) $n=3k$ の時. (ルールにない)

Aが優勝することはありえない。

よって 0

(3) $n=3m$ として. (つまり試合回数の上限が3m回)

(iv) ルール①の状態でAが優勝するのは、

2試合目、5試合目、8試合目、…$3m-1$ 試合目

の時なので、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1}$$

(v) ルール②の状態でAが優勝するのは、

4試合目、7試合目、10試合目…$3m-2$ 試合目

の時なので、

※ $3m+1$ 試合目は、3m回の上限を超えるのでダメ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1}+\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}$

$$=\frac{5}{14}-\frac{3}{28}\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}$$ //