

# 2018年 東大文系数学

## 第2問

(1) 
$$a_7 = \frac{14C_7}{7!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{13 \times 11}{7 \times 6 \times 5} = \frac{143}{210} < 1$$

よ、 $a_7 < 1$

$\frac{m+1C_n}{(m+1)!} = \frac{1}{m!n!}$

(2) 
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{2nC_n}{n!}}{\frac{2n-2C_{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{2n \times (2n-1)}{(2n-2)! \times n! \times n! \times n!}$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{n^3}$$

$$= \frac{2(2n-1)}{n^2} \quad \text{よ、}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \iff \frac{2(2n-1)}{n^2} < 1$$

$$\iff n^2 - 4n + 2 > 0 \quad \text{3, 4, 14, \dots < 30}$$

$$\iff n < 2 - \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2} < n$$

$n \geq 2$  ための:  $n \geq 4$  とき整数すべし

(3) 
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \text{ とき } n \text{ が } n \geq 4 \text{ ための}$$

$a_3 > a_4 > a_5 > \dots$  とある。

また、
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \text{ とき } n \text{ は } n \leq 3 \text{ ための}$$

$a_1 < a_2 < a_3$  とある。

よ、(1)の結果である。  $a_7 < 1$  の3つの不等式より

$$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > 1 > a_7 > \dots$$
 とある。

また  $a_n = \frac{2nC_n}{n!} > 0$  より

$n \geq 7$  とき  $a_n$  は整数である  $a_n$  は存在しない

よ、 $a_n$  が整数だとしたとき  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

$$a_1 = \frac{2C_1}{1!} = 2$$

$$a_2 = \frac{4C_2}{2!} = 3$$

$$a_3 = \frac{6C_3}{3!} = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = \frac{8C_4}{4!} = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = \frac{10C_5}{5!} = \frac{21}{10}$$

$$a_6 = \frac{12C_6}{6!} = \frac{77}{60}$$

以上より  $n \geq 1$  とき  $a_n$  が整数になるときは  $a_1, a_2, \dots$