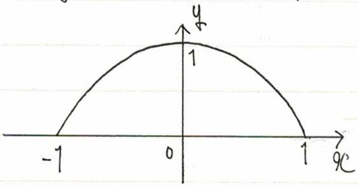
2015年 東大理系数学 第6問 ①

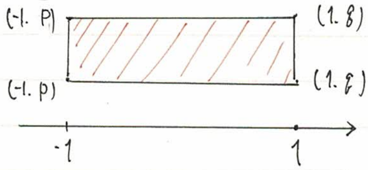
(1)

$y = g(x)$ のグラフは.



・$y \geqq 0$　・上に凸
・偶関数

$f(x)$ は. $|x| \leqq 1$ で. $p \leqq f(x) \leqq q$ を満たす



この領域に入っている関数

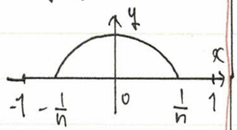
$g(x) \geqq 0$ より $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \geqq 0$ なので.

$p \leqq f(x) \leqq q$

$\downarrow \times \int_{-1}^{1} g(nx)\,dx$ (≧0)

$$p\int_{-1}^{1} g(nx)\,dx \leqq \int_{-1}^{1} g(nx)\cdot f(x)\,dx \leqq q\int_{-1}^{1} g(nx)\,dx \quad (*)$$

$y = g(nx)$ のグラフは



ここで. $\int_{-1}^{1} g(nx)\,dx$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\,dx$$

$$= 2\cdot\int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\,dx$$ ◀偶関数

$$= \int_{0}^{\frac{1}{n}} \{\cos(n\pi x)+1\}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) + x\right]_{0}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$ より

(*)へ

$$\frac{p}{n} \leqq \int_{-1}^{1} g(nx)\,f(x)\,dx \leqq \frac{q}{n}$$

$$\therefore\ p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)\,f(x)\,dx \leqq q$$ //

(2) $\left(\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\right)' = -\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ より

これに気付けるかどうかがkey. 闇雲に計算するだけでなく、出題者の"仕掛け"を見抜こうとして、問題文を読む

$g'(x) = h(x)$ である

よって. $\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

積分

$$= \left[\frac{1}{n}g(nx)\cdot\log(1+e^{x+1})\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{n}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx$$

微分

$$= 0 - 0 - \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx$$

$g(n) = g(-n) = 0$

先に. $\int_{-1}^{1}$ ～ dx を $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}$ ～ dx と積分区間を限定してもより

$$= -\frac{1}{n}\int_{-1}^{1} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx$$

($|x| \geqq \frac{1}{n}$ の時. $g(nx) = 0$ なので.)

$$= -\frac{1}{n}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx$$

(1)の $f(x)$ として使いたいので. Min と Max を求める.

$$\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = \frac{1+e^{x+1}-1}{1+e^{x+1}}$$

次数下げるのは基本

$$= 1 - \frac{1}{1+e^{x+1}}$$

e^{x+1} が単調増加なので. $1 - \frac{1}{1+e^{x+1}}$ は単調増加。

$f(x) = \frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$ とすると.

$|x| \leqq \frac{1}{n}$ の範囲で.

$$\underbrace{f\left(-\frac{1}{n}\right)}_{p} \leqq f(x) \leqq \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)}_{q}$$

(1)の結果より

$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)\,f(x)\,dx \leqq q$ だが.

$p = f\left(-\frac{1}{n}\right)$　$q = f\left(\frac{1}{n}\right)$ として. 適用できるので.

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)\,f(x)\,dx \leqq f\left(\frac{1}{n}\right)$$