$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

について。

ふつうは、下のような問題への解答に使われる。

Q $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$

の時、$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ。

A. $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=1^2-2\times 2$

$=1-4$

$=-3$

$\therefore x^2+y^2+z^2=-3$ なので、

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=1\times(-3-2)+3\times 3$

$=-5+9$

$=4$ //

$x>0$ かつ $y>0$ かつ $z>0$ の時には、

3文字の「相加平均、相乗平均の関係」の証明ができる。

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2)$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$\geqq 0$

$\therefore x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geqq 0$

よって $x>0$ $y>0$ $z>0$ の時、

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geqq 0$

(等号成立は、$x=y$ かつ $y=z$ かつ $z=x$ ⇔ $x=y=z$ の時)

よって、

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$\geqq 0+3xyz$

$=3xyz$

$x^3+y^3+z^3\geqq 3xyz$ において、

$x^3=X$ $y^3=Y$ $z^3=Z$ とおくと、

$x=\sqrt[3]{X}$ $y=\sqrt[3]{Y}$ $z=\sqrt[3]{Z}$ なので、

$X+Y+Z\geqq 3\times\sqrt[3]{X\cdot Y\cdot Z}$

$\div 3$

$\frac{X+Y+Z}{3}\geqq\sqrt[3]{X\cdot Y\cdot Z}$

(但し $X>0$ $Y>0$ $Z>0$)

これは、3文字の相加平均・相乗平均の関係を表す。