2018年　東大文系数学　第1問 ①

(1)

$C: y = x^2 - 3x + 4$ に接する直線 l, m を求める。

$f(x) = x^2 - 3x + 4$ とすると

$f'(x) = 2x - 3$ なので、

$(t, f(t))$ での接線は、

$y - f(t) = f'(t)(x - t)$

$\Leftrightarrow \quad y = (2t-3)(x-t) + t^2 - 3t + 4$ ①

これが原点を通るので、

$0 = (2t-3)(0-t) + t^2 - 3t + 4$

$t^2 - 4 = 0$

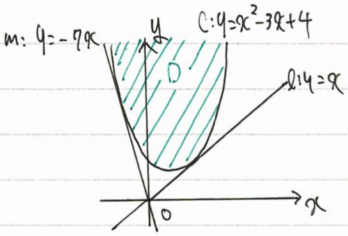
$t = \pm 2$.

① に $t=2$ を代入し、$y = x$

① に $t=-2$ を代入し、$y = -7x$.

$l: y = x \qquad m: y = -7x$ とする。

このときの図は



C上の点 $(s, f(s))$ に対して、

L は $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ と $(s, s^2 - 3s + 4)$ の距離なので、

$$L = \frac{|s - (s^2 - 3s + 4)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-s^2 + 4s - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{(s-2)^2}{\sqrt{2}}$$

M は $y = -7x \Leftrightarrow 7x + y = 0$ と $(s, s^2 - 3s + 4)$ の距離なので

$$M = \frac{|7s + s^2 - 3s + 4|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{|s^2 + 4s + 4|}{5\sqrt{2}} = \frac{(s+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{L} + \sqrt{M} = \sqrt{\frac{(s-2)^2}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{(s+2)^2}{5\sqrt{2}}} = \frac{|s-2|}{\sqrt[4]{2}} + \frac{|s+2|}{\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2}}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$s \geqq 2$ の時

$$\sqrt{L} + \sqrt{M} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2}} \left(\sqrt{5}s - 2\sqrt{5} + s + 2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2}} \left\{\underbrace{(\sqrt{5}+1)}_{傾き正} s - 2\sqrt{5} + 2\right\}$$

$-2 \leqq s \leqq 2$ の時

$$\sqrt{L} + \sqrt{M} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2}} \left(-\sqrt{5}s + 2\sqrt{5} + s + 2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt[4]{2}} \left\{\underbrace{(1-\sqrt{5})}_{傾き負} s + 2\sqrt{5} + 2\right\}$$

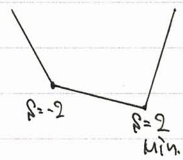
$s \leqq -2$ の時

$$\sqrt{L} + \sqrt{M} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2}} \left(-\sqrt{5}s + 2\sqrt{5} - s - 2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2}} \left\{\underbrace{(-1-\sqrt{5})}_{傾き負} s + 2\sqrt{5} - 2\right\}$$

以上より　$s \leqq -2$ で傾き負、$-2 \leqq s \leqq 2$ で傾き負、$2 \leqq s$ で傾き正　なので、

$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ の最小値は $s = 2$ でとる。



よって、点Aの座標は、

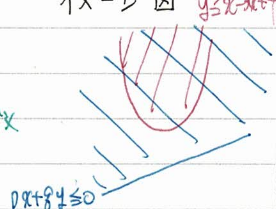
$(2, f(2))$

$= (2, 2)$ //

2018年　東大文系数学　文系第1問②

(2) 領域D が $px+qy \leqq 0$ に含まれればよい。
$y \geqq x^2-3x+4$　　原点を通る直線.

イメージ図

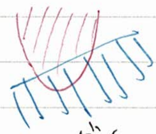


右図のように
$px+qy=0$ の
上側 に ならないとダメ
→ qの符号で
場合分け。

となればよい。

(i) $q>0$ のとき。

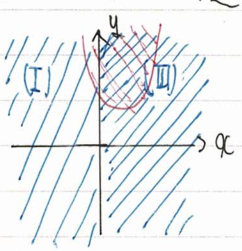
$px+qy \leqq 0 \iff y \leqq -\frac{p}{q}x$ となる。
この領域は $y=-\frac{p}{q}x$ より 下の方だが、
$y \geqq x^2-3x+4$ を全て含むことは できない。



ダメ

(ii) $q=0$ の時.
$px+qy \leqq 0 \iff px \leqq 0$

これが、$y \geqq x^2-3x+4$ をすべて含むには
(I) $p>0$ のとき　$px \leqq 0 \iff x \leqq 0$　不適.
(II) $p=0$ のとき　$0 \leqq 0$　適する
(III) $p<0$ の時　$px \leqq 0 \iff x \geqq 0$　不適



(I)は y軸より左側すべて
(III)は 〃 右側すべて.
Dは y軸の左側にも
右側にもある
よって Dをすべて含むことは出来ない。

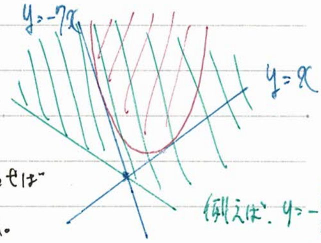
よって $p=0$ $q=0$ のみ.

(iii) $q<0$ の時

$px+qy \leqq 0 \iff y \geqq -\frac{p}{q}x$ となる。

この直線が、D: $y \geqq x^2-3x+4$ をすべて含むには、$y=-\frac{p}{q}x$ が $y=x^2-3x+4$ に接するときより、下側にあればよい。

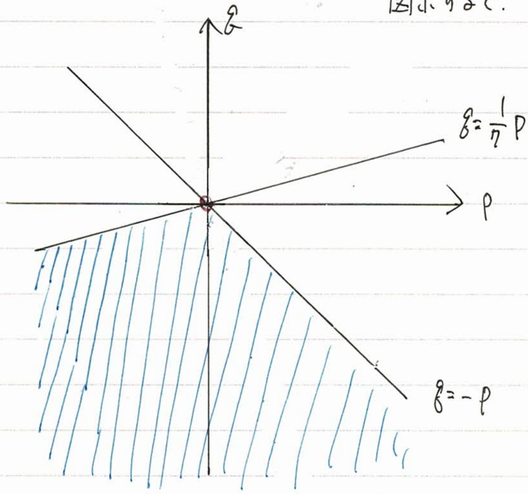
つまり、
$y=-\frac{p}{q}x$ の傾きが
$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1$ を満たせばよい。



例えば、$y=-\frac{p}{q}x$ がこんな傾きのときでも、Dをすべて含む

$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1$
↓ $\times(-1)$
$\iff -1 \leqq \frac{p}{q} \leqq 7$
↓ $\times q<0$
$\iff 7q \leqq p \leqq -q \iff q \leqq \frac{p}{7}$ かつ $q \leqq -p$

以上より $\begin{cases} q<0 \text{ のとき } q \leqq \frac{p}{7} \text{ かつ } q \leqq -p \\ q=0 \text{ のとき } p=0 \end{cases}$ なので
図示すると.



境界はすべて含む