2018年　東大数学　文系第3問　理系第4問

(1)

$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調増加
$\Updownarrow$
$x \geqq 1$ で $f'(x) \geqq 0$

と条件を変換。

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$

増減表は

1 があるとしたらこの2ヶ所

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$0 < 1 < a$ の時

$f(x)$ は $1 < x < a$ で減少してしまう。不適

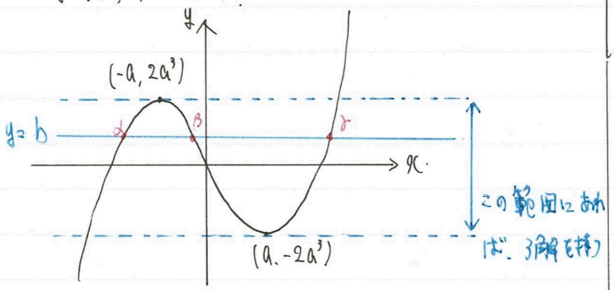
$0 < a \leqq 1$ の時

$f(x)$ は常に単調増加となる。

よって $\underline{0 < a \leqq 1}$

(2)

$y = f(x)$ のグラフは、



$f(-a) = (-a)^3 - 3a^2(-a) = 2a^3$

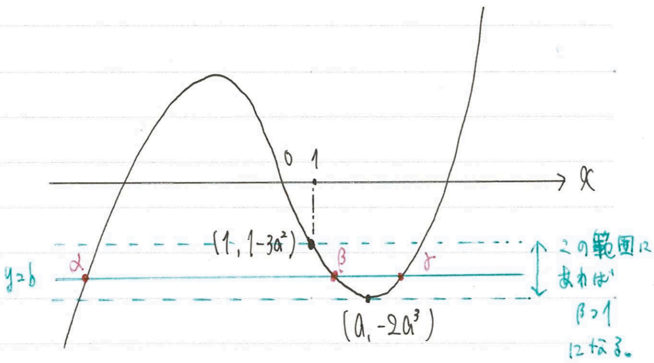
$f(a) = a^3 - 3a^2 \cdot a = -2a^3$

条件1：$f(x) = b$ が異なる3解を持つ

を満たすのは、$-2a^3 < b < 2a^3$ のとき。

この $y = f(x)$ と $y = b$ の交点が左から α, β, γ である。

$\beta > 1$ となるためには下図のようになればよい。



条件2：$\beta > 1$ となるためには、

$x = 1$ と $x = a$ の間で $y = b$ と交わればよい。

よって、求める条件は、$1 < a$ かつ $-2a^3 < b < 1 - 3a^2$ である。

$-2a^3 = 1 - 3a^2 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1) = 0$ より、

$b = -2a^3$ と $b = 1 - 3a^2$ の交点は $a = 1$（重解）と $a = -\frac{1}{2}$

よって求める領域は、