

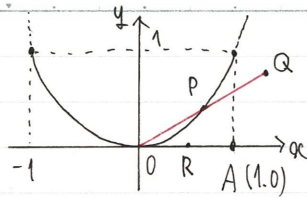
2018年

東大文系数学

第4問

(1) $P(p, p^2)$ とおく
但し $-1 \leq p \leq 1$

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= 2\vec{OP} \\ &= (2p, 2p^2) \end{aligned}$$



$\vec{OQ} = (x, y)$ とおく

$$\begin{cases} x = 2p \\ y = 2p^2 \end{cases} \quad (\text{1) } x=2p \text{ を消去し}$$

$$y = 2p^2 = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

$$-1 \leq p \leq 1 \quad \text{より} \quad -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -2 \leq x \leq 2$$

よって点Qの軌跡は

$$\underline{y = \frac{1}{2}x^2 \text{ 上の } -2 \leq x \leq 2 \text{ の部分}} \quad \#$$

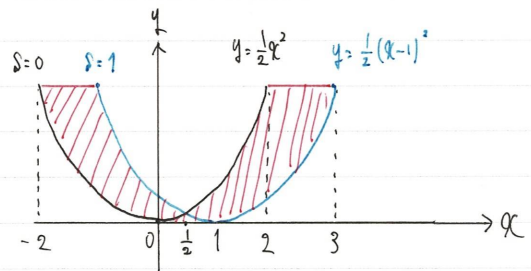
(2) $R(t, 0)$ とおく 但し $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= 2\vec{OP} + \vec{OR} \\ &= \vec{OQ} + \vec{OR} \end{aligned}$$

よって点Rは (1) の点Q を \vec{OR} の方向に
移動させたものとなる。

つまり (1) で求めた軌跡を

x軸方向に 0 から 1 だけ動かしたときの
通過領域である。



この面積は

$x = \frac{1}{2}$ を 線対称 軸のこゝ

$$2 \times \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2}x^2 dx + 1 \times 2 - \int_1^3 \frac{1}{2}(x-1)^2 dx \right\}$$

$$= 2 \times \left\{ \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^2 + 2 - \left[\frac{1}{6}(x-1)^3 \right]_1^3 \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{4}{3} - \frac{1}{48} + 2 - \left(\frac{4}{3} - 0 \right) \right\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{95}{24}}} \quad \#$$