No.
Date

Q 独立試行の Max Min Q

Q.1 サイコロを100回振り、1の目が出た回数を記録する。1の目が出た回数をk回とし、そうなる確率をP_kとする。

(1) P_3を求めよ。

(2) P_kを求めよ。

(3) $\frac{P_{k+1}}{P_k}$を求めよ。

(4) P_kの最大となるkを求めよ。

A. (1) 100回中3回 1が出て $\left(\frac{1}{6}\right)$
97回 他が出る $\left(\frac{5}{6}\right)$

よって、$\underline{{}_{100}C_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{97}}$ //

(2) (1)と同様に、
100回中k回 1が出て $\left(\frac{1}{6}\right)$
$100-k$回 他が出る $\left(\frac{5}{6}\right)$

よって、$\underline{P_k = {}_{100}C_k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}}$ //

(3) $P_{k+1} = {}_{100}C_{k+1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{99-k}$ である。

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{{}_{100}C_{k+1} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}}^{\frac{1}{6}} \cdot \cancel{\left(\frac{5}{6}\right)^{99-k}}}{{}_{100}C_k \cdot \cancel{\left(\frac{1}{6}\right)^k} \cdot \cancel{\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}}^{\frac{5}{6}}}$$

${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$= \frac{\frac{\cancel{100!}}{(k+1)!(99-k)!} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} \cdot 1}{\frac{\cancel{100!}}{k!(100-k)!} \cdot 1 \cdot \frac{5}{\cancel{6}}}$$

$k+1$　　$100-k$

$$= \frac{(100-k)}{5(k+1)} = \underline{\frac{100-k}{5k+5}} \text{ //}$$

(4) $\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1$を考えると、

$\frac{100-k}{5k+5} > 1 \iff 100-k > 5k+5 \iff 95 > 6k$

$\therefore k < \frac{95}{6} = 15.83\cdots$

つまり $k = 1, 2, 3, 4, \cdots 15$の時は $\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1$ なので、 $P_k < P_{k+1}$

$k=1$の時 $P_1 < P_2$　$k=2$の時 $P_2 < P_3$　$k=3$の時… $P_3 < P_4$ ……
…… より $P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_{15} < P_{16}$ となる。 —①

$\frac{P_{k+1}}{P_k} < 1$ を考えると　$k > \frac{95}{6} = 15.83\cdots$ なので、

$k = 16, 17, 18 \cdots 99$の時は、$P_k > P_{k+1}$ となる。

$k=16$の時 $P_{16} > P_{17}$　$k=17$の時 $P_{17} > P_{18}$ …　$k=99$の時 $P_{99} > P_{100}$
より、 $P_{16} > P_{17} > P_{18} > \cdots > P_{100}$ —②

①②より $P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_{15} < \underbrace{P_{16}}_{\text{Max}} > P_{17} > \cdots > P_{100}$

よって、P_{16}が最大なので $\underline{k=16}$ //

ちなみに…　サイコロを1回ふって1が出る確率は$\frac{1}{6}$なので、100回ふったら $100 \times \frac{1}{6} = 16.66\cdots$回くらい1が出そう。
なので、P_{16}が最大になるのは当然。