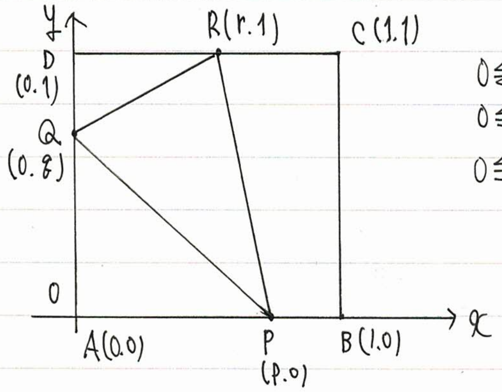
2019年 東大数学 文系第1問 理系第2問①

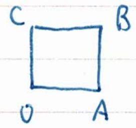


$0 \leqq p \leqq 1$

$0 \leqq q \leqq 1$

$0 \leqq r \leqq 1$

文系では



Point.

理系では、座標が設定されてないが、
直角がある図形（正方形、長方形、直角三角形、立方体など）が登場したら、座標の設定するのを、検討しよう。

方針

不明量 $p.q.r$ の3文字
条件式 $\triangle OPQ = \frac{1}{3}$ $\triangle PQR = \frac{1}{3}$ の2本
$\Rightarrow$ 1文字分の情報量が残る。
（例えば、$q=$(pの式) $r=$(pの式) を導き、pに統一するなど）
$p.q.r$ のどれを残すのが良いかは、
立式後に判断
文系は、(1)の設問から、pを残すのが読み取れてしまう。

$\frac{DR}{AQ} = \frac{r}{q}$ の Max, Min の問題だが、
$p.q.r$ のうち残った文字で表し、グラフを描く問題
文系は $\frac{CR}{OQ} = \frac{r}{q}$ なので、同じ問題

$\triangle OPQ = \frac{1}{3}$ より $\frac{1}{2} \times p \times q = \frac{1}{3}$ $\therefore pq = \frac{2}{3}$ …①

$\triangle PQR = \frac{1}{3}$ だが、
$\triangle PQR = $(台形RDAP) $- \triangle OPQ - \triangle DQR$ なので、
$(r+p) \times 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times p \times q - \frac{1}{2} \times r \times (1-q) = \frac{1}{3}$
①を代入して、整理すると、
$3p + 3rq = 4$ …②

文系では ここで q と r を p で表し、$p.q.r$ の範囲を求める。

$\begin{cases} 0 \leqq p \leqq 1 \\ 0 \leqq q \leqq 1 \\ 0 \leqq r \leqq 1 \end{cases}$ ① $pq = \frac{2}{3}$ ② $3p + 3rq = 4$ 左の5式から範囲を求める。

実際には①から、$p \neq 0$, $q \neq 0$

解法1：式で計算

① より $q = \frac{2}{3p}$ を代入して、$0 \leqq \frac{2}{3p} \leqq 1$ $\therefore \frac{2}{3} \leqq p$ …③

② に ① を代して整理すると、$r = 2p - \frac{3}{2}p^2$ より、
$0 \leqq 2p - \frac{3}{2}p^2 \leqq 1 \iff 0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$ …④
$0 \leqq p \leqq 1$、③、④から、$\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$

① $\iff p = \frac{2}{3q}$ より、$\frac{2}{3} \leqq \frac{2}{3q} \leqq 1$ より、$\frac{2}{3} \leqq q \leqq 1$

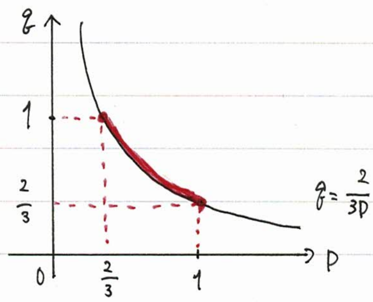
$r = 2p - \frac{3}{2}p^2 = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ と $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ から
$\frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{2}{3}$

よって、$\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ $q = \frac{2}{3p}$
$\frac{2}{3} \leqq q \leqq 1$ $r = -\frac{3}{2}p^2 + 2p$
$\frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{2}{3}$

解法2：グラフで求める。

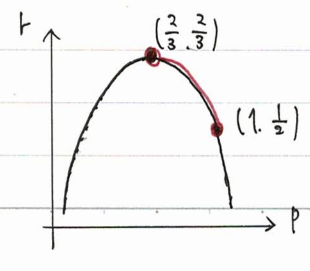
複数の文字で定義域を求める場合、グラフが楽なことが多い。

$0 \leqq p \leqq 1$ $0 \leqq q \leqq 1$ ① $pq = \frac{2}{3} \iff q = \frac{2}{3p}$ より、



より、
$\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$
$\frac{2}{3} \leqq q \leqq 1$

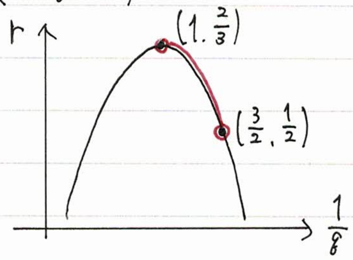
$\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$、$0 \leqq r \leqq 1$ ② $r = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ より、



左図より $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$
$\frac{1}{2} \leqq r \leqq 1$

2019年　東大数学　　文系第1問　理系第2問 ②

$\frac{2}{3} \le q \le 1$　$\frac{1}{2} \le r \le 1$　②より $r = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{q}-1\right)^2 + \frac{2}{3}$ より
$\left(1 \le \frac{1}{q} \le \frac{3}{2}\right)$



左図より
$1 \le \frac{1}{q} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le q \le 1$
$\frac{1}{2} \le r \le \frac{2}{3}$

以上より、　$\frac{2}{3} \le p \le 1$　$\frac{2}{3} \le q \le 1$　$\frac{1}{2} \le r \le \frac{2}{3}$
$q = \frac{2}{3p}$　$r = -\frac{3}{2}p^2 + 2p$ //

$\frac{DR}{AQ} = \frac{r}{q}$ の最大・最小をもとめたい。

方針
$\frac{r}{q}$ に対し、$\begin{cases} 0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1,\ 0 \le r \le 1 \\ pq = \frac{2}{3},\ 3p + 3rq = 4 \end{cases}$ から、
p, q, r のどの文字を消せばよいか考える。
今回は、見た瞬間に判断できるわけではないので、全て試してみてもよい。結果、文系と同様、pを残す。

$$\frac{DR}{AQ} = \frac{r}{q} = \frac{p(-3p+4)}{\frac{2}{3p}} = \frac{3}{4}(-3p^3 + 4p^2)$$
$$= -\frac{9}{4}p^3 + 3p^2$$

$f(p) = -\frac{9}{4}p^3 + 3p^2$ として、$\frac{2}{3} \le p \le 1$ の最大最小を求める。

$f'(p) = -\frac{3}{4}p(9p-8)$

p	$\frac{2}{3}$		$\frac{8}{9}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$ 極大	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

よって最小値は、$p = \frac{2}{3}$ のとき $\frac{2}{3}$
最大値は、$p = \frac{8}{9}$ のとき $\frac{64}{81}$ //