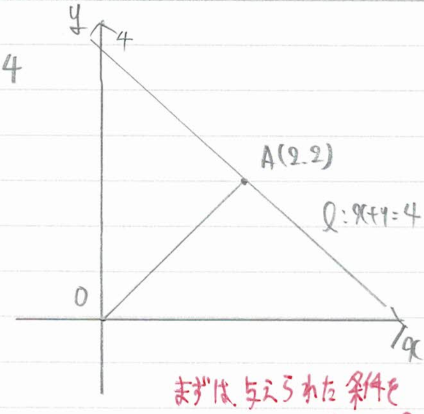
# 2019年　東大数学　文系第2問 ①

右図より
直線ℓは $x+y=4$




(1)

まずは与えられた条件を式にしている。

条件1について、
$\overrightarrow{OA}=(2,2)$　$\overrightarrow{OP}=(p,q)$ なので、
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2p+2q$ なので、

$8 \leqq 2p+2q \leqq 17$　$\therefore\ 4 \leqq p+q \leqq \frac{17}{2}$ …①

条件2について
・点Oと直線ℓ: $x+y-4=0$ の距離が $c$ なので、

$$c = \frac{|0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}.$$

・点P(p,q)と直線ℓ: $x+y-4=0$ の距離が $d$ なので、

$$d = \frac{|p+q-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|p+q-4|$$

条件1より $p+q-4 \geqq 0$ なので、　絶対値が外れて、
$|p+q-4| = p+q-4$ としてよく。　ラッキー

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}(p+q-4)$$

・よって $cd \geqq (p-1)^2$ は

$$2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(p+q-4) \geqq (p-1)^2$$

$$\therefore\ q \geqq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2} \quad \cdots ②$$

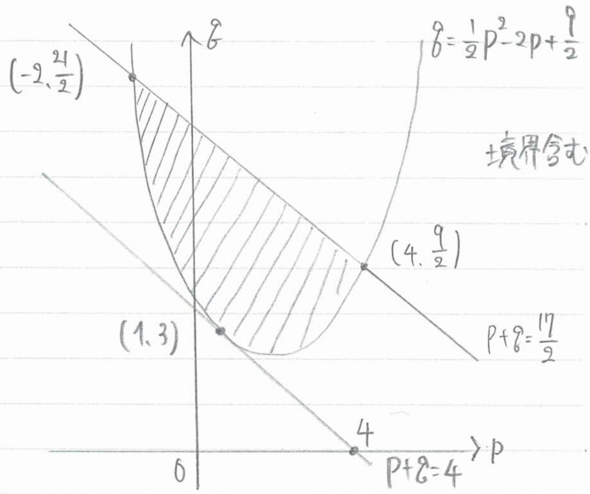
$$\left(q \geqq \frac{1}{2}(p-2)^2 + \frac{5}{2}\right)$$

図示するにあたり、$p+q=4$, $p+q=\frac{17}{2}$ と $q=\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}$ の交点を求めると、

$q=-p+4=\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}$ より $(p-1)^2=0$
$p=1$ で接する。　$(1,3)$

$q=-p+\frac{17}{2}=\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}$ より $(p+2)(p-4)=0$
よって、$(p,q)=\left(-2,\frac{21}{2}\right)$ と $\left(4,\frac{9}{2}\right)$ で交わる。

よって、領域Dは以下のよう




境界含む。

面積は

$$\int_{-2}^{4}\left\{\left(-p+\frac{17}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}\right)\right\}dp$$


の形は $\frac{1}{6}$公式

$$= \int_{-2}^{4} -\frac{1}{2}(p+2)(p-4)\,dp$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\{4-(-2)\}^3 = 18$$

# 2019年　東大数学　文系第2問②

(2) 原点を通る、傾き$m$の直線が、領域$D$の共有点を持つような$m$の範囲を求める。

端点が $\left(-2, \frac{21}{2}\right)$ と $\left(4, \frac{9}{2}\right)$。

接するときの点を求め、$-2 \leqq p \leqq 4$ にあるかを調べる。

$q = mp$ と、$q = \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2}$ が接するときの$m$は、

$$\frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2} = mp$$

$\Leftrightarrow p^2 - (2m+4)p + 9 = 0$ … ③ の(判別式)$=0$ より、

$D/4 = (m+2)^2 - 9 = 0$　　$m = -5, 1$.

このとき、③より

$m = -5$ のとき、$p = -3$、なので、接点は $(-3, 15)$

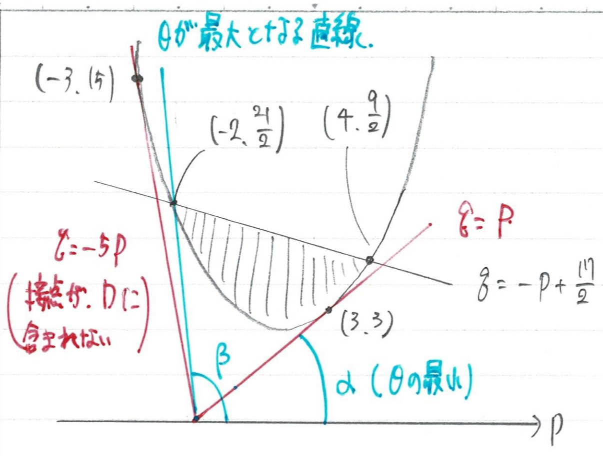
$m = 1$ のとき　$p = 3$　〃　$(3, 3)$

・$(-3, 15)$ は $-2 \leqq p \leqq 4$ に含まれないので、

$\theta$が最大なのは、$q = mp$ が $\left(-2, \frac{21}{2}\right)$ を通るとき。

・$(3, 3)$ は $-2 \leqq p \leqq 4$ に含まれるので、

$\theta$が最小なのは、$q = mp$ が $(3, 3)$ を通るとき。




$\theta$の範囲は、上図の$\alpha$、$\beta$に対し、$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$。

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2}} = -\frac{4}{\sqrt{457}}$$

よって、$-\frac{4}{\sqrt{457}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$