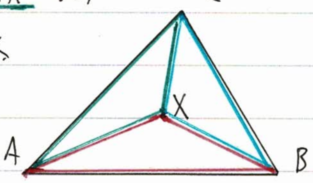
2020 東大数学 理系 第2問

$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = f(X)$ とおく

※この色分けで書きます。




(i) Xが△ABCの周及び内部のとき。(右上図)

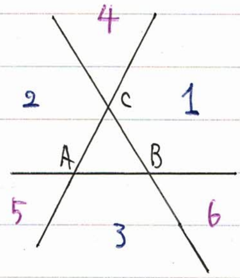
$f(X) = \triangle ABC = 1$ となるため、

$2 \leqq f(X) \leqq 3$ を満たさない。

以下、Xは△ABCの外部にある場合を考える。

点A, B, Cについて、対称性があるので、以下は点Aの"逆側"だけ考える。

点Xが存在する場所について、右のように名前をつけると、1番の場合と4番の場合を調べても一般性を失わない




1番を調べれば、2と3も同様に示せて

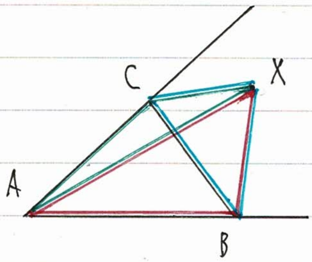
4番 〃 5と6 〃 :示せる

(ii) 点Xが1番にある時、

$f(X) = \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle ACX$

$= \triangle ABC + 2\triangle BCX$

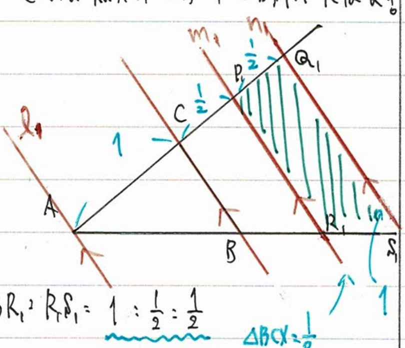
$= 1 + 2\triangle BCX$




よって $2 \leqq 1 + 2\triangle BCX \leqq 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqq \triangle BCX \leqq 1$ となる点Xの場所を調べればよい

ここで、BCを底辺とみると、右のようにBCに平行な直線$l_1, m_1, n_1$を引き、点の名前をつける。




但し、$AC : CP_1 : P_1Q_1 = AB : BR_1 : R_1S_1 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$

すると、点Xが、線分$P_1R_1$, 線分$Q_1S_1$上にあるとき、

$\triangle BCX = \frac{1}{2}$, $\triangle BCX = 1$ になる。

つまり 直線$P_1R_1$は $\triangle BCX = \frac{1}{2}$, 直線$Q_1S_1$は $\triangle BCX = 1$ となる直線

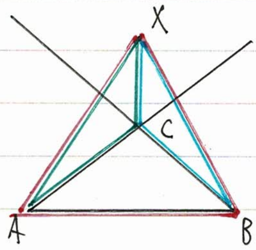
よって、$\frac{1}{2} \leqq \triangle BCX \leqq 1$ を満たす点Xは、台形$P_1R_1S_1Q_1$の周及び内部にあればよい。

(iii) 点Xが4番にある時、

$f(X) = \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle ACX$

$= 2\triangle ABX - \triangle ABC$

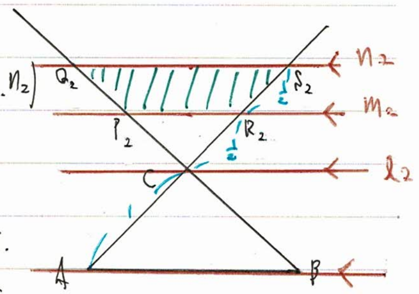
$= 2\triangle ABX - 1$




よって $2 \leqq 2\triangle ABX - 1 \leqq 3$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqq \triangle ABX \leqq 2$ となる点Xの場所を調べればよい。

ここで、ABを底辺とみて、ABに平行な直線を引く。($l_2, m_2, n_2$) 右のように、$P_2Q_2R_2S_2$を定義する。



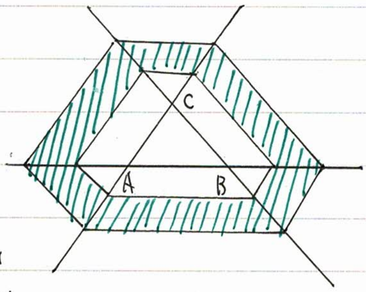

$AC : CR_2 : R_2S_2 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ とすると、

点Xが、線分$P_2R_2$, 線分$Q_2S_2$上にあるとき、$\triangle ABX = \frac{3}{2}$, $\triangle ABX = 2$ となる。

よって、台形$P_2R_2S_2Q_2$の周及び内部にあると、

$\frac{3}{2} \leqq \triangle ABX \leqq 2$ を満たす。

以上の議論を、1, 4 以外にも、2, 3, 5 6 の領域に適用して、図示すると、右のよう。




面積に関して、

(ii)の台形$P_1Q_1R_1S_1$の面積は、

$\triangle ABC$と$\triangle AR_1P_1$と$\triangle AS_1Q_1$の相似比が $1 : \frac{3}{2} : 2$ なので、

$2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$

(iii)の台形$P_2R_2S_2Q_2$も同様に $1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

よって、求める面積は $\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4}\right) \times 3 = \frac{15}{2}$