2020年　東大数学　　文系第1問 ①

$f(x)=x^3-3ax^2+b$ とおく。 ◀便利なので、とりあえず、$f(x)$とおく

$f'(x)=3x^2-6ax$

$=3x(x-2a)$

条件1 ⇔ ($f(x)$の極値)$=0$ なので、とりあえず、増減表。

増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $f(0)$	↘	極小 $f(2a)$	↗

なので

条件1を満たすためには、$f(0)=0$ または $f(2a)=0$ である。

(i) $f(0)=0$ のとき、

$f(0)=0^3-3\times a\times 0^2+b=0$

$b=0$ であるが、仮定より $b>0$ なので 不適

この路線は消えた。

(ii) $f(2a)=0$ のとき、

$f(2a)=(2a)^3-3a\times(2a)^2+b$

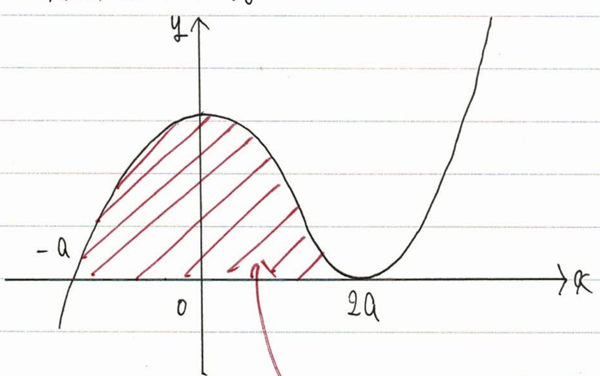
$=b-4a^3=0$

$\therefore\ b=4a^3$ ◀ bの値が決定

よって、以下は $b=4a^3$ を代入して進める

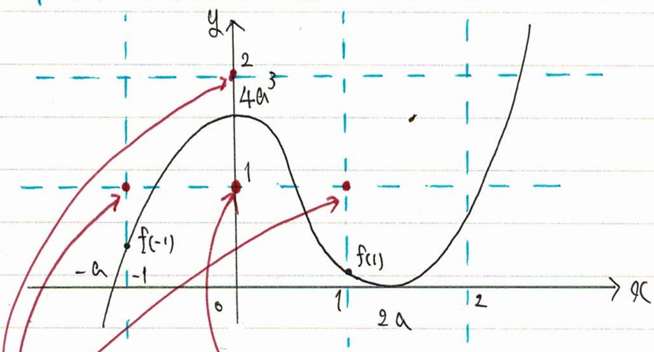
すると、$f(x)=x^3-3ax^2+4a^3$ と決定できる。

$f(x)=(x+a)(x-2a)^2$ を考慮すると、グラフの概形は下のよう。



この領域（境界含まず）に格子点が1つだけ入ればよい。

格子点を書き込むと、下のようになればよい。



この(0,1)のみ領域内にある。

(0,1)の隣の3点が領域外にあればよい。

(0,0)は境界上にあり、必ず領域外である。

$f(-1)$と$f(1)$はいくら小さくなっても構わない

この条件を立式すると、
$$\begin{cases} ①\ f(-1)\leqq 1 & \text{かつ} \\ ②\ 1<f(0)\leqq 2 & \text{かつ} \\ ③\ f(1)\leqq 1 \end{cases}$$
である。

② $1<f(0)\leqq 2$ より　$1<4a^3\leqq 2$　⇔　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ …②'

③ $f(1)\leqq 1$ より

$1-3a+4a^3\leqq 1$　$4a^3-3a\leqq 0$　$a(4a^2-3)\leqq 0$

ここで

②'より $4a^2<4\times 2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$ であり、$16<27$ の両辺を$\frac{1}{3}$乗した $2^{\frac{4}{3}}<3$ を利用すると、

$4a^2<2^{\frac{4}{3}}<3$ なので、$4a^2-3<0$ が示せ、

$a>0$ なので、$f(1)\leqq 1$ ⇔ $a(4a^2-3)\leqq 0$ は

②'の範囲のaで必ず成立する。

① $f(-1)\leqq 1$ より

$-1-3a+4a^3\leqq 1$ ⇔ $4a^3-3a-2\leqq 0$ であるが、

③から $4a^3-3a<0$ が示せているので、①も成立する。

以上より、$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を満たす aであれば題意を満たす。

$b=4a^3$,　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

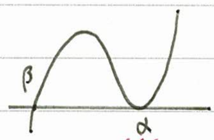
2020年　　東大数学　　文系第1問 ②

$\boxed{\text{条件1に関する別解}}$

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ に対し、

$y=f(x)$ が x軸に接するとき、

$f(x)=0$ が重解に持つ。



(重解)

よって、$f(x)=0$ の3解を、α, α, β

とすると、　　　　αを2つにする

解と係数の関係は、

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + \beta = 3a \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta = 0 \\ \alpha^2\beta = -b \end{cases}$$

3文字
3式

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 3a & \cdots ① \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = 0 & \cdots ② \\ \alpha^2\beta = -b & \cdots ③ \end{cases}$$

← $\alpha(\alpha+2\beta)=0$ を解きたいが、

ここで $f(0) = 0+0+b = b$ であるが、

$b>0$ の条件があるので $f(0)=b \neq 0$

よって $x=0$ は $f(x)=0$ の解ではないため、

$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$

$\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$ を示し

② より $\alpha(\alpha+2\beta)=0$ であるが、

$\alpha \neq 0$ なので $\alpha + 2\beta = 0$ 　∴ $\alpha = -2\beta$

①③に代入し、

①より $-3\beta = 3a$ 　∴ $\beta = -a$

③より $4\beta^3 = -b$ 　∴ $\underline{b = 4a^3}$ //

同じ解。