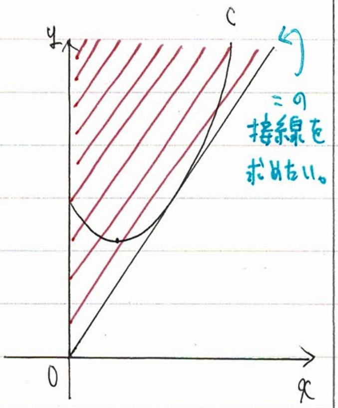
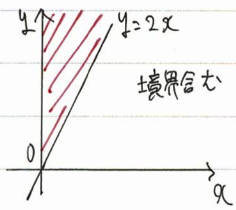
2020年　東大数学　文系第3問 ①

(1) 解法1　図形的に考える。

Pが C上 を動き、半直線OP の通る領域を求めるので、右図 の ような、領域に なるはず。
⇒ 領域の右端の接線を求めたい。



$y = mx$ と $y = x^2 - 2x + 4$ を連立して、
$mx = x^2 - 2x + 4$
$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 4 = 0$
(判別式) $= (m+2)^2 - 4\times1\times4 = 0$
$m^2 + 4m - 12 = 0 \quad m = -6,\ 2$
図から、明らかに $m > 0$ なので、$m = 2$
よって、求める領域 は、y軸 と $y = 2x$ の 間の領域 になり、右のよう。



解法2　大筋は、解法1と同じ。接線の求め方を変えた。

$y = f(x) = x^2 - 2x + 4$ とすると、$y' = f'(x) = 2x - 2$ で、
$(t, f(t))$ での 接線は、
$y - f(t) = f'(t)(x - t)$
$\Leftrightarrow y = (2t-2)x - t^2 + 4$

これが 原点 を通るので、
$0 = 0 - t^2 + 4 \quad t = \pm 2$
放物線C は $x \geqq 0$ の領域 にしか ないので、$t > 0$
$\therefore t = 2$
接線は $y = (2\times2 - 2)x - 2^2 + 4$
$\therefore y = 2x$　　(以下略)

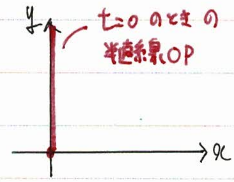
解法3　解の配置 を利用

C上の点P の x座標を t とすると、$P(t,\ t^2 - 2t + 4)$ すると、半直線 OP は、

$$y = \frac{t^2 - 2t + 4}{t}x \quad (x > 0,\ y > 0,\ t > 0) \quad \text{①}$$

と表せる。

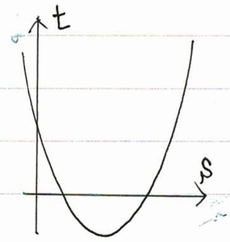
但し、$t = 0$ のとき、右図のように、半直線 OP は、$x = 0$ $(y \geqq 0)$ を表す ので、① は $t > 0$, $x > 0$, $y > 0$ に 限って よい。



パラメータ で 整理して、解の配置

① $\Leftrightarrow xt^2 - (2x+y)t + 4x = 0$
左辺 を t の 2次方程式 と みなした ものを $g(t)$ と すると、
$g(t) = 0$ が $t > 0$ に 少なくとも1つ 解を 持てば よい。
※ $x > 0$ なので、$g(t)$ は 2次方程式 で、
$y = g(t)$ は、下に凸 の 放物線で ある。

(i) $g(t) = 0$ が $t > 0$ に 2解を 持つとき (重解許す)

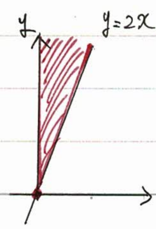


① (判別式) $\geqq 0$ より
$(2x+y)^2 - 4\times x\times 4x \geqq 0$
$(y - 2x)(y + 6x) \geqq 0$
$y > 0$ かつ $x > 0$ より $y + 6x > 0$ なので、
$y - 2x \geqq 0 \quad \therefore y \geqq 2x$

② 軸 > 0 より
$g(t) = x\left(t - \frac{2x+y}{2x}\right)^2 - \frac{(2x+y)^2}{4x} + 4x$ から、
軸 $= \frac{2x+y}{2x} > 0$
これは、すべての $x > 0$, $y > 0$ で 成立する。

③ $g(0) > 0$ より
$4x > 0$　これも、すべての $x > 0$ で 成立する。

① かつ ② かつ ③ より、
求める領域は $\begin{cases} x > 0 \text{ かつ } y > 0 \text{ かつ } y \geqq 2x \\ \text{または} \\ x = 0 \text{ かつ } y \geqq 0 \end{cases}$



2020年　東大数学　文系第3問 ②

$\boxed{\text{解法④}}$ ファクシミリ論法を利用

解法③ の ①の式より

$$y=\frac{t^2-2t+4}{t}x \qquad (t>0,\ x>0,\ y>0)$$

右辺をパラメータで整理して。
(x は固定)
y の最大・最小(とりうる範囲)を求める。

$\frac{t^2-2t+4}{t}=t+\frac{4}{t}-2$ とすると。$(t>0)$

相加平均相乗平均の関係から、

$$t+\frac{4}{t}-2 \geqq 2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}-2=2$$ なので、

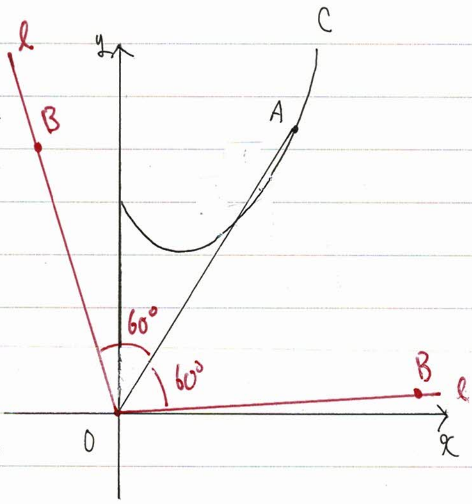
等号成立条件は
$t=\frac{4}{t}$　∴ $t=2$
($t>0$に適する)

① ⇔ $y=\frac{t^2-2t+4}{t}x$
$y\geqq 2x$

以上より、求める領域になる。

(2).

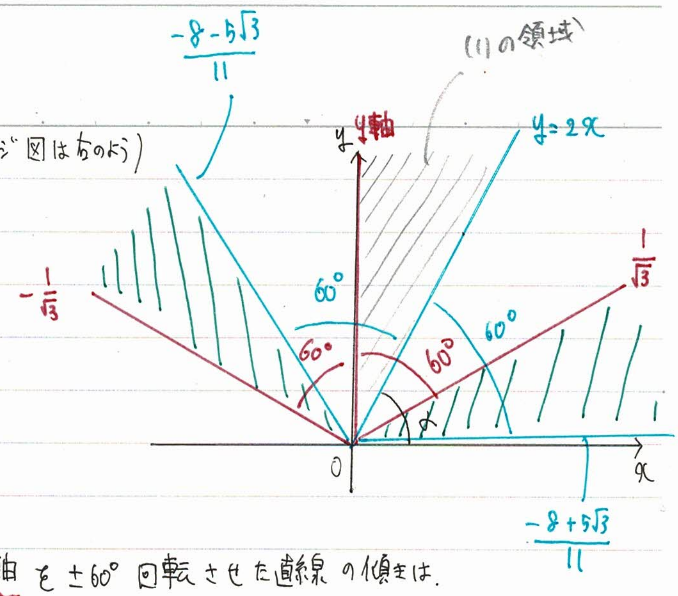
例えば、右の場所に
点Aがあった時、
lは、赤線の場所に
とり、
点Bを、OA=OBとなる
ようにとれば、
正三角形OABが作れる。



このように、点AがC上のどこにあっても、
l は OA との角が60°になるようにとれば、
必ず△OABが正三角形になるように点Bがとれる。

点AがC上を動くとき、半直線OAは、(1)の結論の領域を動くので、y軸とy=2x((1)の領域の境界)を60°回転させた直線の傾きを求めればよい。

(イメージ図は右のよう)



y軸を±60°回転させた直線の傾きは、
x軸から、30°, 150°の角度なので、
傾きは、$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\tan 150^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

y=2xを±60°回転させた直線の傾きを求める。
y=2xとx軸がなす角をαとすると、$\tan\alpha=2$ であり、
求める傾きは、$\tan(\alpha-60^\circ)$ と $\tan(\alpha+60^\circ)$ である。

$$\tan(\alpha-60^\circ)=\frac{\tan\alpha-\tan 60^\circ}{1+\tan\alpha\times\tan 60^\circ}=\frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=\frac{-8+5\sqrt{3}}{11}$$

$$\tan(\alpha+60^\circ)=\frac{\tan\alpha+\tan 60^\circ}{1-\tan\alpha\tan 60^\circ}=\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\frac{-8-5\sqrt{3}}{11}$$

以上より、求める a の範囲は、

$$\frac{-8-5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{または} \quad \frac{-8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

//

2020年　東大数学　文系第3問 (3)

$\boxed{解法⑥}$ 包絡線を利用

解法③の冒頭で作った
半直線OPの式を、tで降べきの順で並べ

$$xt^2-(2x+y)t+4x=0 \quad \cdots (*)$$

(*)をtで微分し

$$2xt-(2x+y)=0$$

接点

$$\therefore\ t=\frac{2x+y}{2x} \quad \cdots (**)$$

(*)と(**)を連立してtを消去すると

$$x\cdot\left(\frac{2x+y}{2x}\right)^2-(2x+y)\cdot\frac{2x+y}{2x}+4x=0$$

(整理して)

$$y^2+4xy-12x^2=0$$

$$(y+6x)(y-2x)=0$$

接するグラフ

$$y=-6x,\ 2x$$

$y=-6x$ のとき　$t=\dfrac{2x-6x}{2x}=-2<0$
よって $t>0$ を満たさない

$y=2x$ のとき　$t=\dfrac{2x+2x}{2x}=2>0$
よって $t>0$ を満たす

よって $y=2x$ を得る

確かに $y=2x$ を得るが、
包絡線は、曲線に接する直線の場合に威力を
発揮するのに対し、今回は直線が得られたため、
あまり効果的でない。
$y\leqq 2x$ の領域を得る考察も、接点の考察も
難しいため、オススメできない。