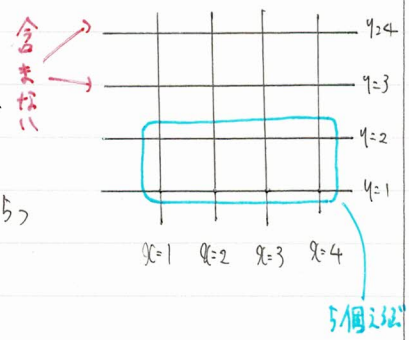
2020年　東大数学　文系第2問 ①

(1)

点を1個も含まない直線の選び方は、
(i) x軸に平行な2本
(ii) 〃
(iii) x軸に平行とy軸に平行が1本ずつ
の3通り

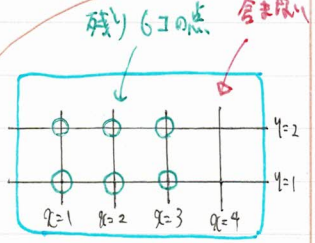
(i) x軸に平行な2本が点を1個も含まない場合。

例えば右のように$y=3$と$y=4$が点を含まない場合、右の青枠の中の8つの点から5つを選ぶ。
(全部で ${}_8C_5$ 通り)



このうち、含まない直線がもう1本あるものは除かなければならない。

$x=4$を含まないとすると、残り6コの点のうち5コを選ぶので ${}_6C_5$ 通り
$x=4$以外に、$x=1$, $x=2$, $x=3$ から1本選べるので ${}_4C_1$ 通り



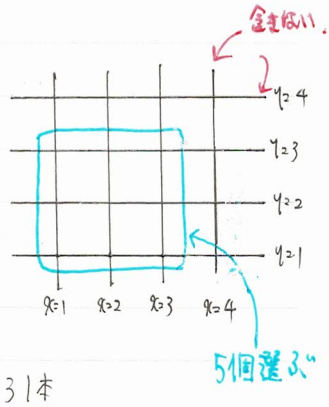
$y=3$と$y=4$以外の選び方は ${}_4C_2$ 通りある。

よって $({}_8C_5 - {}_6C_5 \times {}_4C_1) \times {}_4C_2 = 192$ 通り

(ii) は (i) と全く同じだけ場合の数があるので、
192通り

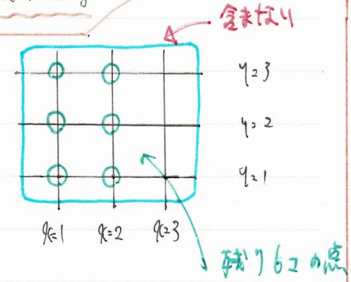
(iii) x軸に平行、y軸に平行な直線が1本ずつ、点を含まない時。

例えば、左のように、$x=4$, $y=4$が点を含まないとすると、左の青枠の中の9個の点から5個を選ぶ
(全部で ${}_9C_5$ 通り)



このうち、点を含まない直線がもう1本あるものは、除外しなければならない。

例えば、$x=3$を含まない場合、残り6コの点のうち5コの点を選ぶので ${}_6C_5$ 通り
含まない直線の選び方は、$x=1, 2, 3$, $y=1, 2, 3$ の6本から選ぶので、
${}_6C_1$ 通り



$x=4$, $y=4$ 以外の選び方は、$x=1, 2, 3, 4$ から1本、$y=1, 2, 3, 4$ から1本を選ぶので ${}_4C_1 \times {}_4C_1$ 通り

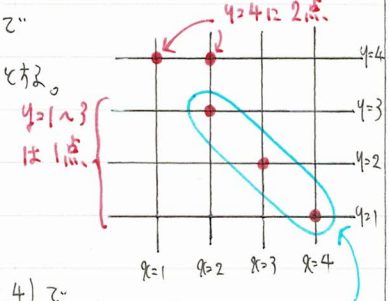
よって $({}_9C_5 - {}_6C_5 \times {}_6C_1) \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 = 1440$ 通り

以上より、(i)〜(iii)を合計して、
$192 + 192 + 1440 = 1824$ 通り

2020年　東大数学　文系 第2問 ②

(2) 注 (1)の流れから、余事象を検討するが、
面倒で、あきらめる(回転移動)方がよい。
ちょうど1本 ⇒ 計算が面倒
ちょうど2本 ⇒ (1)で求めた。
ちょうど3本 ⇒ 計算可

8本の直線が全て点を含む場合を(余事象を使わず)求める。
まず、$y=1$〜4 に5点を配置する。
すると、3本の直線は1点を含み、
残り1本の直線は2点を含むことになる。
例えば、$y=4$ に2点で
他は1点だとする。



2点を含む直線の
選び方は ${}_4C_1$ 通り

右図は、(1,4)と(2,4)で
$y=4$ 上に配置されているが、
他の配置のしかたもある。
4点のうち、2点を選ぶので ${}_4C_2$ 通り

他の3点は、$x=3$ と $x=4$ に
含まれるように配置する

残り3点の配置のしかたに関して、

解法1

(i) 3点とも $x=3$、$x=4$ の上にある場合、
$2^3 - 1 - 1 = 6$ 通り。
($x=3$、$x=4$ から3回選ぶ)
(全て $x=4$ 上)
(全て $x=3$ 上)

(ii) $x=1$、$x=3$、$x=4$ の上にある場合、
3点を3直線に並べるので、$3! = 6$ 通り。

(iii) $x=2$、$x=3$、$x=4$ の上にある場合、
(ii)と同様に6通り

よって、(i)〜(iii)の合計で、18通り。

解法2

$x=1$〜4 に3点を配置して 4^3 通り。
このうち、$x=3$ と $x=4$ の両方に点がないものを、
除外する。

(i) 3点とも $x=1$ と $x=2$ のどちらかに
配置されると、2^3 通り。

(ii) $x=1$、$x=2$、$x=3$ のどれかに配置され、
$x=3$ には少なくとも1つ配置される場合、
$3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$ 通り
(全て $x=1$ と $x=2$ の上)

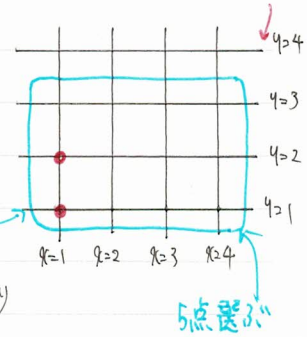
(iii) $x=1$、$x=2$、$x=4$ のどれかに配置され、
$x=4$ には少なくとも1つ配置される場合、
(ii)と同様に19通り。

以上、$4^3 - 2^3 - 19 - 19 = 18$ 通り。
(i) (ii) (iii)

求める選び方は、${}_4C_1 \times {}_4C_2 \times 18 = 432$ 通り。

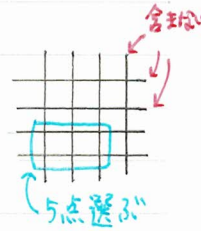
別解 注 のように、余事象を使う。

(i) ちょうど1本、点を含まないのは、
その含まない1本の選び方が ${}_5C_1$ 通り。
以下、$y=4$ を選んだとして進める。



$x=1$〜4 の4本に5点を配置するので、
どこかに2点、他3本に1点になる。
2点を配置する直線の選び方は ${}_4C_1$ 通り
以下、$x=1$ に2点を配置したとする。
$x=1$ 上の3点($y=4$ を除く)に2点を配置するので ${}_3C_2$ 通り
以下、$y=1$、$y=2$ に配置したとする。
残り3点を、少なくとも1点が $y=3$ に配置されるように する。
$y=1$〜3 に自由に配置して、$y=1$ と $y=2$ に集中したものを除くと、
$3^3 - 2^3$ 通り
以上より、${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 \times (3^3 - 2^3) = 1824$ 通り。

(ii) ちょうど3本、点を含まないのは、
2本が平行、1本が直交する場合のみ。
平行な2本は ${}_4C_2$ 通り、直交する1本は ${}_4C_1$ 通り。
残り6点から、5点を選ぶのは ${}_6C_5$ 通りなので、
${}_4C_2 \times {}_4C_1 \times {}_6C_5 = 288$ 通り。



全ての点の選び方は ${}_{16}C_5 = 4368$ 通り。

よって、$4368 - 1824 - 1824 - 288 = 432$ 通り。