2020年　東大数学　文系第4問　理系第4問 ①

(1)

復

$72 = 2^3 \times 3^2$ の自然数の約数の総和は、
$(1+2^1+2^2+2^3)(1+3^1+3^2)$ で求められるが、

式で表現すると、

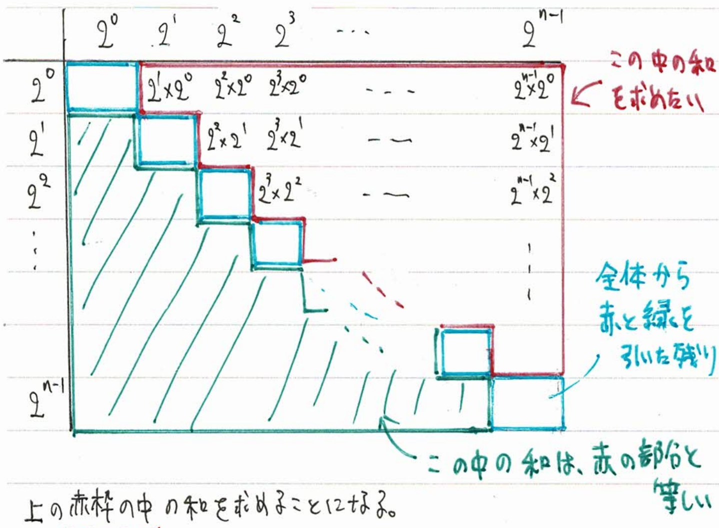
$1\times1 + 1\times3^1 + 1\times3^2 + 2^1\times1 + 2^1\times3^1 + 2^1\times3^2$
$+ 2^2\times1 + 2^2\times3^1 + 2^2\times3^2 + 2^3\times1 + 2^3\times3^1 + 2^3\times3^2$

表で表現すると、

	1	2^1	2^2	2^3
1	1×1	$2^1\times1$	$2^2\times1$	$2^3\times1$
3^1	1×3^1	$2^1\times3^1$	$2^2\times3^1$	$2^3\times3^1$
3^2	1×3^2	$2^1\times3^2$	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$

このようにかけ算の表を作って
枠の中を足せばよい。

$a_{n,2} = 2^0\times2^0 + 2^0\times2^1 + \cdots + 2^0\times2^{n-1} + 2^1\times2^2 + 2^1\times2^3 + \cdots + 2^1\times2^{n-1}$
$+ \cdots$ 　であるが表で表すと、



上の赤枠の中の和をもとめることになる。

緑枠の中は、対称性から、赤枠の中の値と等しい。

残りの青枠の中は、$2^0\times2^0 + 2^1\times2^1 + 2^2\times2^2 + \cdots + 2^{n-1}\times2^{n-1}$

$= 4^0 + 4^1 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1}$

$= 1\times\frac{4^n-1}{4-1} = \frac{1}{3}(4^n-1)$

枠の中全体の和は、
$(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2$ なので、

求める数 $a_{n,2}$ は、

$$a_{n,2} = \{(\underbrace{2^0+2^1+\cdots 2^{n-1}}_{全})^2 - \frac{1}{3}(4^n-1)\}\div 2$$

予備校のネットの答案はいきなり、ここからスタートしてた!

$$= \{(2^n-1)^2 - \frac{1}{3}(4^n-1)\}\div 2$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)$$

(2) 何をしたら良いかわからないので、とりあえず具体的な値を代入

$f_1(x) = 1 + a_{1,1}x$
$= 1 + x$
∵ $a_{1,1} = 2^0\times2^0 = 1$

$f_2(x) = 1 + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2$
$= 1 + 3x + 2x^2$
$= (1+x)(1+2x)$

$a_{2,1} = 2^0 + 2^1 = 3$
$a_{2,2} = \frac{1}{3}(2^2-1)(2^2-2) = 2$
((1)より)

$f_3(x) = 1 + a_{3,1}x + a_{3,2}x^2 + a_{3,3}x^3$
$= 1 + 7x + 14x^2 + 8x^3$
$= (1+x)(1+2x)(1+4x)$

$a_{3,1} = 2^0+2^1+2^2 = 7$
$a_{3,2} = \frac{1}{3}(2^3-1)(2^3-2) = 14$
$a_{3,3} = 2^0\times2^1\times2^2 = 8$

以上より、$f_n(x) = (1+x)(1+2x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)$
ではないかと推測できる。

※普通なら、ここで帰納法で証明という流れになるが、
$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,n}x^n$ と
$f_{n+1}(x) = 1 + a_{n+1,1}x + \cdots + a_{n+1,n}x^n + a_{n+1,n+1}x^{n+1}$
を見比べて、$a_{n,k}$ と $a_{n+1,\ell}$ に関係式が見出しづらいので、断念。

2020年　東大数学　文系第4問　理系第4問 ②

ここで $(1+x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)$ において展開したときの

x^1 の係数は $1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=a_{n,1}$

x^2 の係数は $1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^1\times1+2^1\times2^1+\cdots+2^1\times2^{n-1}+\cdots+2^{n-1}\times2^{n-1}=a_{n,2}$

である。

一般化すると、確かに、上の式を展開した時の x^k の係数は、$2^m\ (m=0,1,2\cdots n-1)$ から異なる k 個を選んで、それらの積をとり、すべての選び方に対し ${}_nC_k$ 個の整数の和 $a_{n,k}$ になっている。

以上より $f_n(x)=1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,n}x^n$
$=(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)$
である。

よって $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\dfrac{(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)}{(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)}=1+2^nx$ ①

$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=\dfrac{(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^nx)}{(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^nx)}=1+x$ ②

(3) $a_{n+1,k+1}$ は $f_{n+1}(x)$ の展開式における x^{k+1} の係数である。

(2)で $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx$ ①　$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$ ②

と結論が出たので、これを利用して求める

① ⇔ $f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)$

② ⇔ $f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$　の2式の展開式の

x^{k+1} の係数を比較する。$=a_{n+1,k+1}$

① ⇔ $(1+2^nx)(1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,k}x^k+a_{n,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,n}x^n)$

の x^{k+1} の係数は $a_{n,k+1}+2^n\times a_{n,k}$

② ⇔ $(1+x)(1+a_{n,1}(2x)+\cdots+a_{n,k}(2x)^k+a_{n,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots+a_{n,n}(2x)^n)$

の x^{k+1} の係数は $2^{k+1}a_{n,k+1}+2^k\cdot a_{n,k}$

よって $\begin{cases} a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^n\times a_{n,k} \\ a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^k\times a_{n,k} \end{cases}$

この2式から $a_{n,k+1}$ を消去すると

$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\dfrac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$

$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を求めるので $a_{n,k+1}$ は邪魔。