Maclaurin expansion & Taylor's

Introduction

計算機がなかった時、人々はどのようにして sin や cos、e^x や $\log x$ の値を求めていたのだろう？ もし、これらが(無限個の) x の多項式で表せたなら、紙と鉛筆と根気で何とか計算することができよう。たとえば、$f(x)=3+5x+2x^2+x^3$ で表される関数があったとしよう。$x=1.2$ の時の $f(x)$ を求めよと言われたら、代入さえすれば、13.608 と値を出すことができる。

What is Maclaurin Expansion?

仮に、$\cos(x)$ が、x の4次式 $\underbrace{A_0}_{x^0\text{の係数(定数項)}}+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4$ で表されたなら。

でも、A_0〜A_4 の値がわからない。 そこで、ひとまず x に0を代入してみるのだ。

$\cos(0)=A_0=1$ となる。 では、残りの A_1〜A_4 はどうやったらよいだろう？

両辺を x で微分してみよう!! すると、$-\sin(x)=\underbrace{1\times A_1}+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3$

point また新しい定数項がでてきた!!

先程同様、x に0を代入すると、
$-\sin(0)=1\times A_1=0$ より、$A_1=0$ となる。

このように、両辺を x で微分しては、$x=0$ を代入 することを繰り返してみると…

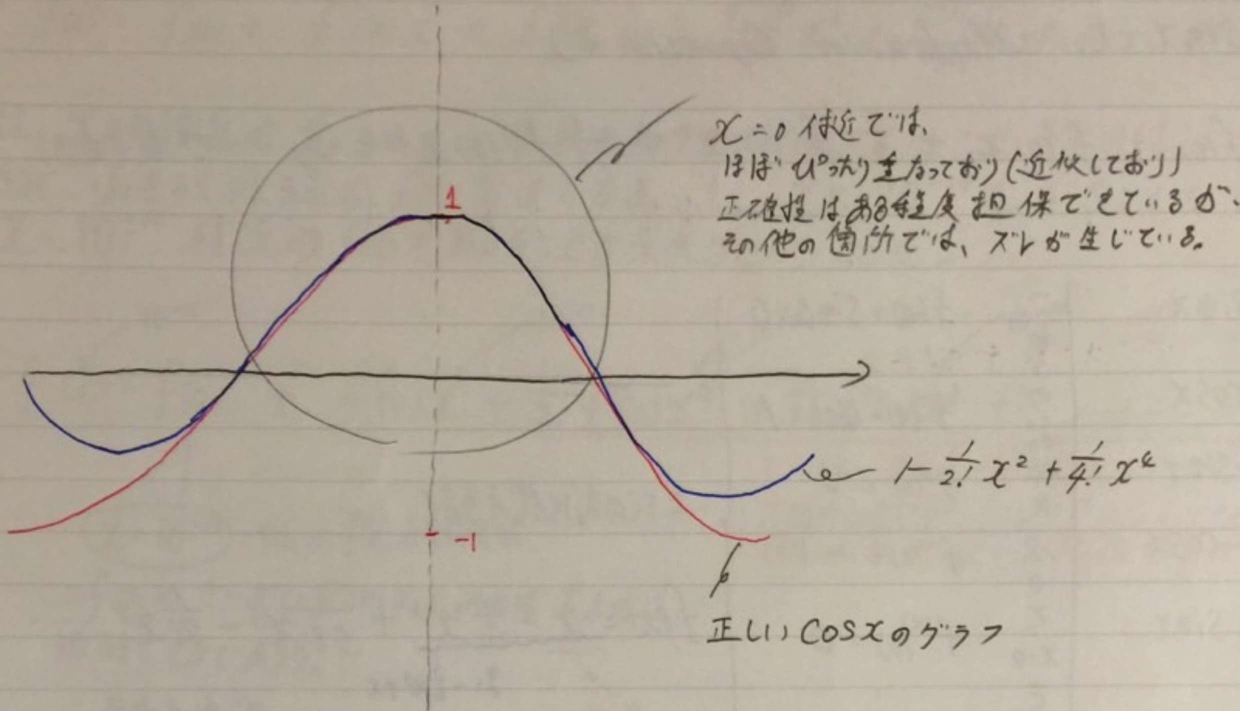
$$-\cos(x)=2\times1\times A_2+3\times2\times A_3x+4\times3\times A_4x^2$$

$$-\cos(0)=\underbrace{2\times1}_{2!}A_2=-1 \qquad A_2=-\frac{1}{2\times1}=-\frac{1}{2!}$$

順次やっていくと、

$\cos(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4$ となる。

この段階で、visualに捉えてみると、



そこで、もっともっと… xの最高次数を無限大に発散させてくと、
限りなくrealに近づけることができるはずだ。

以上をまとめたのが　0をぶち込んでいるのがMaclaurin Expansionのcore point!!

n回微分

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots}$$

Maclaurin Expansion なのである。

(別角度から考えてみよう)

$f(x) = \sin x$ とし、Maclaurin Expansion より、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots$$ で表される。

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

$\vdots$

これらの結果に、次々と $x=0$ をぶちこむと…

$f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1$

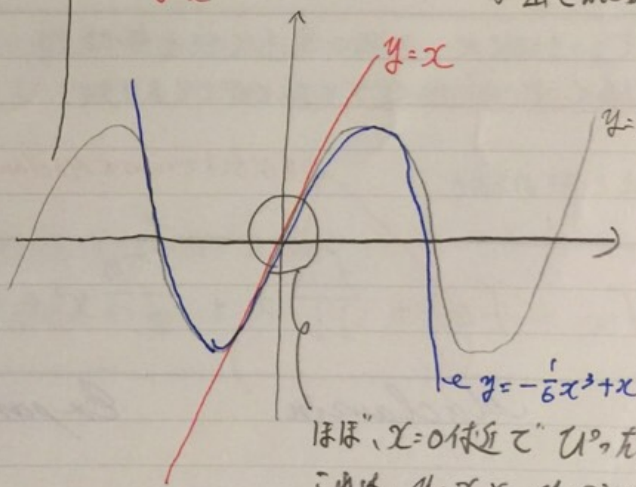
$f^{(4)}(0) = 0$

$\vdots$

上記の式に代入すると、

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{x}_{y=x} - \frac{1}{6}x^3}_{y=-\frac{1}{6}x^3+x} + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots$$

が出される。



ほぼ、$x=0$ 付近でぴったり。
これは、$y=x$ と、$y=\sin x$ の $x=0$ 付近における微分係数を出してみれば明らか。

$\underline{y'=1}$ と $y'=\cos 0 = \underline{1}$

傾きが一致!!

But!! $x=0$ 以外のところでは、$y=\sin x$ と $y=x$ は一致していない。

そこで、$y=-\frac{1}{6}x^3+x$ をひいてみると、少しずつ $y=\sin x$ の概形に接近していることがわかる。

One more step!!

$x=0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots\cdots$$

もし、$x=0$付近の$y=\sin x$の状況を知りたければ、xに0を入れればよい。
すると、けっきょく残るのは$f(0)$だけとなる。もし、xに10^{-10}をぶちこんだ場合、
$x=10^{-10}$付近の$f(x)$を知ることが出来るということだ。

$$f(\overset{10^{-10}}{x}) = f(0) + f'(0)\overset{10^{-10}}{x} + \frac{1}{2!}f''(0)\overset{10^{-10}}{x^2} + \frac{1}{3!}f'''(0)\overset{10^{-10}}{x^3} + \cdots\cdots$$

もちろん、精度を高めるためには、これら部分も大切なわけだが、$(10^{-10})^3$なんてものは、相当に微小な数であるとは想像するにたやすい。

$x=10^{-10}$付近の$f(x)$の状況は、
この$f(0)$やせいぜい$f'(0)x$をみれば大まかに
理解できるであろう。

以上、概観してきたように、$x=0$付近の$y=\sin x$のグラフを高い精度で表現しようとしたのがマクローリン展開である。とはいえ、そこで表せたグラフは、$x=2$や$x=10$においても正確性が担保されており、汎用性を有している!!

これが意味するは何であろうか。

cf. $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\cdots$

仮に、$\sin x$を3回微分したものに
$x=0$を代入したとしよう・・・

$$(\sin x)'''\Big|_{x=0} = -1 \quad となる.$$

だが、仮に$x-\frac{1}{6}x^3$部分を取り出して3回微分しても、

$$\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)' = 1-\frac{1}{6}\times 3x^2$$

$$\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)'' = \left(1-\frac{1}{6}\times 3x^2\right)' = -\frac{1}{6}\times 3\times 2\times x$$

$$(\quad〃\quad)''' = \left(-\frac{1}{6}\times 3\times 2\times x\right)' = -\underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{1}{3!}}\times\underbrace{3\times 2\times 1}_{3!} \quad となる.$$

計算結果を合わせるために、$\frac{1}{3!}$をかけたり、$\frac{1}{5!}$をかけたりすることは必要なのである!!

DATE

以上、見てきた Maclaurin Expansion は、様々な関数に応用ができる!!

◎ 指数関数の Maclaurin Expansion

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ となる e^x をマクローリン展開すると、

$e^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 \cdots\cdots$ となる。

($e^0=1$ より、$e^0 = A_0 = 1$ $(e^x)' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 \cdots\cdots$ に $x=0$ を代入して、$A_1 = 1 \cdots\cdots$)

$(e^x)''' = 3\times2\times1\times A_3 = 1$

$\therefore e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 \cdots\cdots$

このMaclaurin展開をみれば、「なるほど、微分しても確かにe^xの形は変わらない」
ことに気付かされる!!

(ex) $(e^x)' = 1 + \frac{2}{2\times1}x + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\times2\times1}x^2 + \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\times3\times2\times1}x^3 \cdots\cdots$

$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots\cdots$ となり、この結果は何度微分しても変わらない。

◎ $\frac{1}{1-x}$ という分数関数に Maclaurin Expansion を適用すると…

とりあえず、まずは

$\boxed{\frac{1}{1-x}} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 \cdots$ とおく。

$x=0$ を代入すると、$\frac{1}{1-0} = 1 = A_0$

次に、両辺を微分すると、$\frac{-1\times(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 \cdots\cdots$

そして、この式に $x=0$ を代入すると、$1 = A_1$ となり、以降、A_2、A_3、$A_4 \cdots$ いずれも 1 となる。

よって、$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\cdots$ となる。

実は、ここで求めた、"微分に基づくマクローリン展開"と、
次に述べる数列に基づく無限級数の和という2つの
異なるアプローチから得られる式とが"一致"する!!
これが数学の美的完全性と言われる所以である。

④. ここで、等比数列の第n項までの和 S_n をもとめてみると、
(初項1、公比 x)

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$ となる。

この公比 x の絶対値がもし、$|x|<1$ ならば、極限 $n \to \infty$ でとると、S_n は収束する

xが$\frac{1}{2}$や$\frac{1}{3}$といった分数

$n \to \infty$ により、$|x|<1$ をみたすxは0に収束!!

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}\right) = \frac{1-x^n}{1-x} = \boxed{\frac{1}{1-x}}$$

Maclaurin Expansion $\rightarrow \boxed{\frac{1}{1-x}} \leftarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right)$

(ただし $|x|<1$

これでなければ x^n は 0には収束しないから。)

Maclaurin Expansion を、自由かつ大胆に用いてみると、思いがけない数学の世界をひらいてくれることもある!! マクローリン展開という道具は、単に近似値計算に使うだけの代物ではない。後述する Eular の公式とて、Maclaurin Expansion を Flexible に用いて challenge せねば、導けぬ宝物であったに違いない

~advanced~

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

ここで、xに虚数を入れてみたら、どうなるのだろう。$3i$や$5i$といった……
ixと考えると……

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{1}{2!} - \frac{i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{i}{5!}x^5 \cdots$$

($\because i^2 = -1$ より)

これらを実数項と虚数項とに分けると、

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right)}_{\text{まさしく、cosのMaclaurin Expansion}} + \underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots\right)i}_{\text{こちらは、まさしく sin の Maclaurin Expansion}}$$

まとめると、

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i \times \sin(x)}$$ となる。

これが、オイラーの公式 (Euler's Formula) である!!

⇓

実数の世界で他人と思われていた
三角関数と指数関数とが、実は虚数の世界を
通じてつながっていた事実をreveal してくれたのである。

そして、この $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ の x に π を代入したときに
えられる式が、『博士の愛した数式』でも知られている

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$ なのである!!

$$\left(e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + i \times \underbrace{\sin\pi}_{0}\right)$$

話を戻して、上記の Euler's Formula だが、三角関数を指数関数で
表現するに極めて有効である!!

ex
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \cdots\cdots ①$$
$$e^{-ix} = \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} - \underbrace{i\sin x}_{\sin x = -\sin(-x)} \quad \cdots\cdots ②$$

①、②より、
$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}}$$ が導かれた!!

e を用いることで、微分や積分の計算を
劇的に容易にしてくれた!!

まとめると、

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i \times \sin(x)}$$ となる。

これが、オイラーの公式 (Euler's Formula) である!!

⇓

実数の世界で他人と思われていた
三角関数と指数関数とが、実は虚数の世界を
通じてつながっていた事実をreveal してくれたのである。

そして、この $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ の x に π を代入したときに
えられる式が、『博士の愛した数式』でも知られている

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$ なのである!!

$$\left(e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{i\sin\pi}_{0}\right)$$

話を戻して、上記の Euler's Formula だが、三角関数を指数関数で
表現するに極めて有効である!!

ex)
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \cdots\cdots ①$$
$$e^{-ix} = \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} - \underbrace{i\sin x}_{\sin x = -\sin(-x)} \quad \cdots\cdots ②$$

①、②より、
$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}}$$ が導かれた!!

e を用いることで、微分や積分の計算を
劇的に容易にしてくれた!!

ex $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$ があったとすると、フツーは、$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ を利用して解くが、

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 dx = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (e^{ix}-e^{-ix})^2 dx$$

$(2i)^2 = -4$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(e^{i2x}+e^{-i2x}-2\times\frac{e^{ix}}{e^{ix}}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (e^{i2x}+e^{-i2x}-2)\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2i}e^{i2x}-\frac{1}{2i}e^{-i2x}-2x\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{4}\times(-4\pi) \quad (\because e^{\pm i4\pi}=1=e^0)$$

$$= \pi$$

Taylor Expansion

〜 Maclaurin Expansion は万能か？〜

ex 対数関数 $\log(x)$ は、Maclaurin Expansion では「展開不能」である!!

なぜなら、$\log x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$ とおいたとき、

A_0 を求めるために、$x=0$ を両辺に代入しようとすると、$\log x$ は、$x=0$ での値が $-\infty$ となっており、このままでは、[$x=0$ 代入] という手法による、A_0 や A_1 の同定ができないこととなる!!

⇓

この問題の元凶は、関数 $\log x$ が、$x=0$ 地点では定義されていないところにある。

⇓

そこで、$x=0$ での値が有限となるように $\log x$ を x 軸方向に平行移動し、その移動後の関数を Maclaurin 展開するわけだ。

例えば、$\log x$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動した $\log(x+1)$ ならば、$x=0$ での値が定義できるわけだから、$x=0$ 代入と微分との組み合わせにより、Maclaurin 展開できるはずである。

ex) $\log(x+1) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \cdots\cdots$

両辺に $x=0$ を代入すると、左辺は $\log(0+1) = \log 1 = 0$、右辺は A_0 であるから、$A_0 = 0$

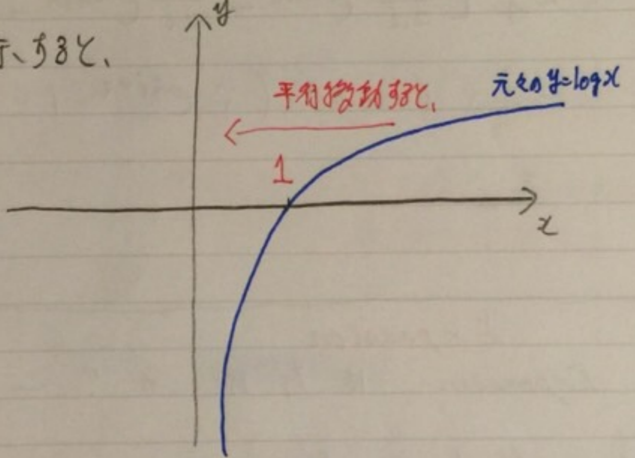
続いて、両辺を微分すると、

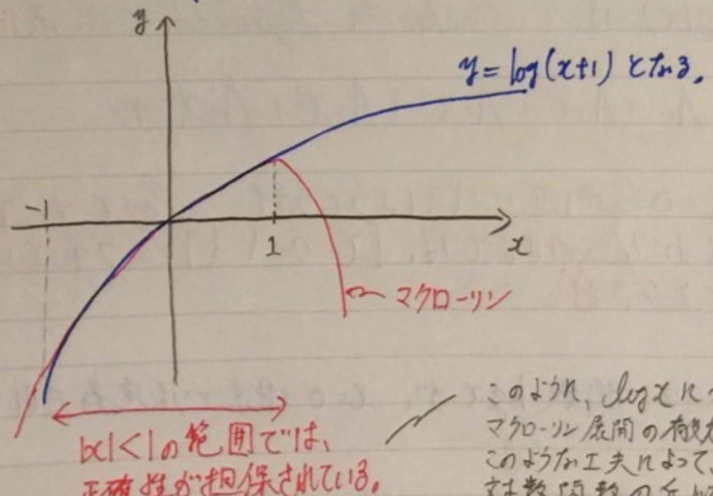
$\frac{1}{x+1} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \cdots\cdots$ となり、この式に $x=0$ を代入すると、

$\frac{1}{0+1} = 1 = A_1$ が得られる。同様にして、次々と係数 A_n を求めていくと、

$$\log(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\cdots$$ となる。

図示すると、





このように、$\log x$ については、
マクローリン展開の有効範囲に制限はあるが、
このような工夫によって、ムリだと思われていた
対数関数の近似計算は可能となったのである。

今までやってきたことをまとめると、

① 関数f(x)をx軸方向にaだけ平行移動し、

② マクローリン展開にかけたことになる。

③ 更に、そこで出てきた結果をx軸方向に−aだけ平行移動して"元に戻す"操作を、Taylor Expansionと呼称することとしよう。

$\log(\boxed{x+1}) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\cdots$ において

$x+1 = X$ とおくと、$\log(X)$の無限級数展開を得ることができる!!
$(x = X - 1)$
（X^∞にまで項を広げてゆく）

$$\log(X) = (X-1) - \frac{1}{2}(X-1)^2 + \frac{1}{3}(X-1)^3 - \frac{1}{4}(X-1)^4 + \cdots\cdots$$

右辺がXではなく、$(X-1)$の多項式となっている点、マクローリン展開とは異なる。

$\Downarrow$

Taylor Expansion

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \cdots\cdots = \sum_{a=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$$

"$x=a$の周りのテイラー展開"
（$x=a$を主軸とした$f(x)$の概形把握）

（cf. $a=0$とすると、マクローリン展開となる。
すなわち、「$x=0$の周りのテイラー展開」がMaclaurin Expansionなのだ）

これによって、de l'Hospitall's rule（ロピタルの定理）も証明できるようになる!!