2018年

第　3　問

$a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2) 次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1 ： 方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2 ： さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

2017年

第　3　問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点Pを考える。

(a) 最初に，点Pは原点Oにある。

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 最初から1秒後の点Pの座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

2019年

第　3　問

正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。

点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

操作：コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる。

以下の事象を考える。

事象 S：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。

事象 T：1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する。

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ。

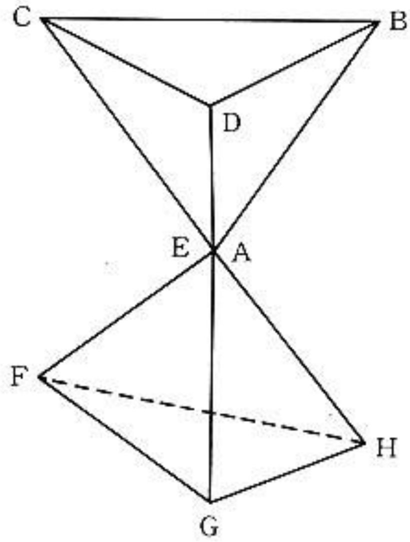
(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

1999年

第 4 問

(1) 四面体ABCDの各辺はそれぞれ確率$\frac{1}{2}$で電流を通すものとする。このとき，頂点AからBに電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2) (1)で考えたような2つの四面体ABCDとEFGHを図のように頂点AとEでつないだとき，頂点BからFに電流が流れる確率を求めよ。



1997年

第　4　問

$0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数 t に対して，xy 平面上の点 A，B を

$$\mathrm{A}\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\ -2\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{2}{3}t,\ -2t\right)$$

と定める。t が $0 \leqq t \leqq 1$ を動くとき，直線 AB の通りうる範囲を図示せよ。

2014年

第　3　問

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と 線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1)　s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 (s,t) が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2)　D を図示せよ。

2019年　　第　2　問

O を原点とする座標平面において，点 A$(2, 2)$ を通り，線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 P(p, q) が次の 2 つの条件をみたしながら動く。

条件 1 ：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件 2 ：点 O と直線 l の距離を c とし，点 P(p, q) と直線 l の距離を d とするとき $cd \geqq (p-1)^2$

このとき，P が動く領域を D とする。さらに，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1) D を図示し，その面積を求めよ。

(2) $\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2012年

第　2　問

実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし，座標平面上の4点 O(0，0)，A(0，1)，B(1，0)，C(t，0)を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle \mathrm{ACO} = \angle \mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

2016年

第　1　問

座標平面上の 3 点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ。また，その条件をみたす点 $P(x, y)$ の範囲を図示せよ。

1995年

第 3 問

xy 平面において，曲線 $y = -x^3 + ax$ 上の $x > 0$ の部分に，点 P を次の条件をみたすようにとる。ただし $a > 0$ とする。

> 点 P におけるこの曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき，原点 O における接線が∠QOP を二等分する。

このとき，△QOP の面積 $S(a)$ の最小値と，それを与える a の値を求めよ。

1997年

第 2 問

a，b を正の数とし，xy 平面の 2 点 A（a，0）および B（0，b）を頂点とする正 3 角形を ABC とする。ただし，C は第 1 象限の点とする。

(1) 3 角形 ABC が正方形 $D = \{(x,\ y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ に含まれるような（a，b）の範囲を求めよ。

(2)（a，b）が(1)の範囲を動くとき，3 角形 ABC の面積 S が最大となるような（a，b）を求めよ。また，そのときの S の値を求めよ。

2004年

第　1　問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P，Q，R が次の条件をみたしている。

△PQR は一辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき，a の値を求めよ。

2008年

第　3　問

座標平面上の３点 A(１，０)，B(−１，０)，C(０，−１)に対し，

$$\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{BPC}$$

をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$, B, C とする。