Date

# 2021年　東大数学　文系第1問.①

この問題を考察している間に、別解がたくさん出てきました。
はじめに、私が見つけた解答例の全体像をお見せします。

**準備**　各、図形や方程式に名前をつけます。

曲線 C：$y=f(x)=ax^3-2x$　　C上の点 $P(t, f(t))$ での接線 $l$：$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

法線 $n_1$：$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$

円 D：$x^2+y^2=1$　　D上の点 $Q(\cos\theta, \sin\theta)$ での接線 $m$：$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

法線 $n_2$：$y=(\tan\theta)\cdot x$

緑色の数字が解法の通し番号です

**大方針 その1**：CとDの共有点が6個になる条件を考察する。（CとDを連立して、解が6個）

C：$y=f(x)=ax^3-2x$ と D：$x^2+y^2=1$ を連立して、

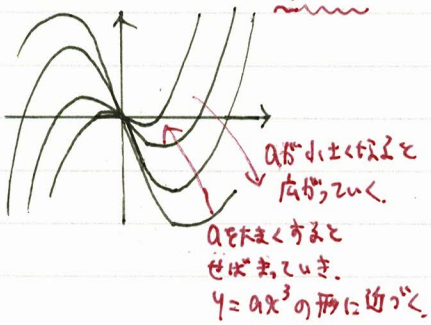
① $y$ を消去して $x$ を残す　一番オススメ
② $x$ を消去して、$y$ を残す　解けるけど、計算激しい。
③ $x$ と $y$ 両方残す　解けない（可能性として出してみただけ）

**大方針 その2**：CとDが接するときの $a$ を求め、$a$ を動かす（Cの形を変える）ことで範囲を考察する。

(補)

$y=ax^3-2x$ $(a>0)$ において、

$a$ の値が大きくなると、変形する




実際、$y'=3ax^2-2$ より

| $x$ | | $-\sqrt{\frac{2}{3a}}$ | | $\sqrt{\frac{2}{3a}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $y$ | ↗ | $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}$ | ↘ | $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}$ | ↗ |

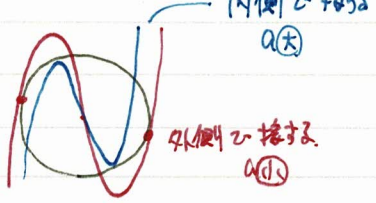
となり、極大値は $\left(\sqrt{\frac{2}{3a}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}\right)$

だが、これを考察すると、

$\sqrt{\frac{2}{3a}}$ は $a$ を大きくすると、ドンドン小さくなるので、$(0,0)$ に近づいていく。

また、極大値の軌跡は、$x=\sqrt{\frac{2}{3a}}$　$y=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3a}}$ から パラメータ $a$ を消去して、$y=-\frac{4}{3}x$ となる

よって、円との交点は、




左のような小さい $a$ と大きい $a$ の間の範囲になるだろうと考えて、接するときの $a$ をおぜていく。

（実際は、接する $a$ は、$a=2$、$\frac{50}{27}$ で、正解は $\frac{50}{27}<a<2$）

(注)

大方針 その2 のような方法は、厳密に共有点が6個となる場合を考えているわけではなく、3次関数の膨らみ方を追っているので、減点されない記述が難しいかもしれない。

**誤方針**

「Cの極値が外にあればよい。」

と考えてはダメ。

再現答案でダメと見られました。

右方が極値で接しているように見えるが

拡大

実際は極値より少しずれたところで接している。

極値が接するのは、$x$ 軸に平行な直線ダヨー

2021年　東大数学　文系第1問②

**大方針 その2：接する時のQを求める。** の下で、色々な解法を挙げていきます。

**方針2-1**：CとDを連立して、出て来た方程式が重解を持つ。

C：$y=f(x)$ と D：$x^2+y^2=1$ を連立して、

④ yを消去して、xを残す。xの6次方程式が出る。 解ける。

⑤ x ： y ： 。yの ＝ 。 計算が大変で解けない。

⇒ 重解を持つ条件

**方針2-2**：接線を利用して、アレコレ

| | もう片方に接する | 2つの接線が一致する | 直交条件 (傾き)·(傾き)=-1 | 直交条件 (内積)=0 | 法線が原点を通る |
|---|---|---|---|---|---|
| C上に点P(t, f(t))をおいて処理 | 点P(t, f(t))が円上にある $t^2+\{f(t)\}^2=1$ (*) ＋ lが円Dに接する $d=r$ ⑥ or $D=0$ ⑦ | l：$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ と 点Pでの円の接線 $tx+f(t)y=1$ ⑩ が一致する (*)を利用。 | OPの傾き $\frac{f(t)}{t}$ と lの傾き $f'(t)$ を利用。 $\frac{f(t)}{t}\times f'(t)=-1$ ⑫ (*)を利用 | $\overrightarrow{OP}=(t, f(t))$ と lの方向ベクトル $(1, f'(t))$ で $(t, f(t))\cdot(1, f'(t))=0$ (*)を利用 ⑭ | 法線$h_1$ $y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ が原点を通る $0=-\frac{1}{f'(t)}(0-t)+f(t)$ (*)を利用 ⑯ |
| D上に点Q(cosθ, sinθ)をおいて処理 | 点Qが C上に存在 $\sin\theta=f(\cos\theta)$ ＋ (**) mが $y=f(x)$ と接する 連立して、重解条件 極値=0 ⑧ or 解と係数の関係 ⑨ | m と $y=f'(\cos\theta)(x-\cos\theta)+f(\cos\theta)$ が一致。 (**)を利用 ⑪ | OQの傾き $\tan\theta$ と $f'(\cos\theta)$ が直交。 $\tan\theta\cdot f'(\cos\theta)=-1$ (**)を利用 ⑬ | $\overrightarrow{OQ}=(\cos\theta, \sin\theta)$ と lの方向ベクトル $(1, f'(\cos\theta))$ が直交 $(\cos\theta, \sin\theta)(1, f'(\cos\theta))=0$ (**)を利用 ⑮ | 法線$h_1$ $y=-\frac{1}{f'(\cos\theta)}(x-\cos\theta)+f(\cos\theta)$ が原点を通る。 $0=-\frac{1}{f'(\cos\theta)}(0-\cos\theta)+f(\cos\theta)$ (**)を利用 ⑰ |

要するに、

接線が他のグラフに接する条件をたくさん出したということです。

全部で19通りの解法がありますが、

やはりオススメは①で、

中には計算が激しいものも多いです。

次ページからは、1つずつ解説します。

| 法線ベクトルが $\overrightarrow{OP}$ と平行 |
|---|
| lの法線ベクトル $(f'(t), -1)$ が $\overrightarrow{OP}=(t, f(t))$ と平行なので、 $(f'(t), -1)=k(t, f(t))$ ⑱ となる実数kが存在する。 (*)を利用 |
| lの法線ベクトル $(f'(\cos\theta), -1)$ が $\overrightarrow{OQ}=(\cos\theta, \sin\theta)$ と平行なので、 $(f'(\cos\theta), -1)=k(\cos\theta, \sin\theta)$ となる実数kが存在。 ⑲ (**)を利用 |

# 2021年　東大数学　文系第1問. ③

**解法①** 連立して $y$ を消去. $x$ が6個解を持つ条件 これが方針

$C: y=f(x)=ax^3-2x$ と

$D: x^2+y^2=1$ を連立して. $y$ を消去する

$x^2+(ax^3-2x)^2=1$

$a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0$ ↓整理

メモ

思いつきやすいけど. 6次方程式になって. やや引く.

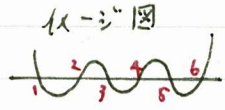
ふつうは避けたいと思う解法かも。

これが. 6個の実数解を持つ。

しかし. 6次関数の極値の条件では

大変なので、「工夫」する。

イメージ図




$x^2=X$ とおき. 3次方程式へ.

$x^2=X$ とおくと

$a^2X^3-4aX^2+5X-1=0$

この $X$ の3次方程式が. $X>0$ の範囲に3解を持てばよい。

3次の解の配置の問題に帰着

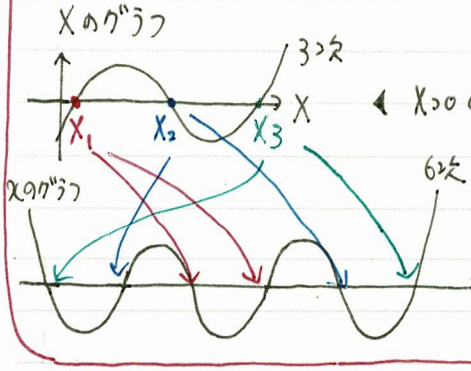
$x^2=X>0$ だて. 1つの $X$ に対して $x=-\sqrt{X}$. $\sqrt{X}$ の2解が対応

$x^2=X=0$ だて : $x=0$ の1解が対応

$x^2=X<0$ だと : $x$ の実数解が対応しない.

今回は $x$ の解が6個ほしいので: $X>0$ の解が3つあると

$3\times2=6$ で個数が対応する




◀ $X>0$ の部分に3解

◀ 1つの $X$ に対し. 2つの $x$ が対応 計6個.

$h(x)=a^2X^3-4aX^2+5X-1$ とおくて.

$y=h(x)$ が $X>0$ で $X$ 軸と3回 交われば よい。

$h'(x)=3a^2X^2-8aX+5$

$=(3aX-5)(aX-1)$

$h(x)=0$ の解は

$X=\frac{1}{a}, \frac{5}{3a}$ の2つ

$a>0$ より

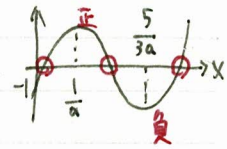
$\frac{1}{a}<\frac{5}{3a}$

増減表は

| $X$ | $0$ … | $\frac{1}{a}$ … | $\frac{5}{3a}$ … |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | − | + |
| $h(x)$ | $-1$ ↗ | $h(\frac{1}{a})$ ↘ | $h(\frac{5}{3a})$ ↗ |

$h(\frac{1}{a})=a^2\times\frac{1}{a^3}-4a\times\frac{1}{a^2}+5\times\frac{1}{a}-1=\frac{2}{a}-1$

$h(\frac{5}{3a})=a^2\times\frac{125}{27a^3}-4a\times\frac{25}{9a^2}+5\times\frac{5}{3a}-1=\frac{50}{27a}-1$




$h(\frac{1}{a})>0$ かつ $h(\frac{5}{3a})<0$ となればよく.

$\frac{2}{a}-1>0$ かつ $\frac{50}{27a}-1<0$

よって $\frac{50}{27}<a<2$

**コメント**

6次方程式には 驚いてしまうが.

論を進めると. シンプルな解法に落ち着く

他の解法では. 計算量が多くなりすぎる

などで. 現実的 ではないため.

恐らく、この解法が. 東大の想定していたものだと思われる.

Date

# 2021年　東大数学　文系第1問④

## 解法② 連立して、xを消去、yが6個解を持つ条件

C: $y=ax^3-2x$
D: $x^2+y^2=1$
から、xを消去する

式の形から、カンタンにはxを消せない
しかたなく次数を上げて処理
Cを2乗して、偶数乗にする。
正直、あまりおりたくない解法。
ふつうなら、この時点で避けるでしょう。

Cを2乗して、

$y^2=x^2(ax^2-2)^2$
$y^2=(1-y^2)\{a(1-y^2)-2\}^2$ ← $x^2=1-y^2$を代入
⋮（整理して）　yの降べきの順。
$a^2y^6+(-3a^2+4a)y^4+(3a^2-8a+5)y^2-a^2+4a-4=0$

解法①と同様に、$y^2=Y$とおき、Yの3次方程式へ。
Yつのに3解持てば、yが6個の解を持つ。

$y^2=Y$とおき、Yつのに3解を持つ条件を求める。

$I(Y)=a^2Y^3+(-3a^2+4a)Y^2+(3a^2-8a+5)Y-a^2+4a-4$

$I'(Y)=3a^2Y^2+2(-3a^2+4a)Y+3a^2-8a+5$

$=(aY-a+1)(3aY-3a+5)$ ← なんて、頑張ると因数分解できる。

$I'(Y)=0$を解くと
$Y=\frac{a-1}{a}, \frac{3a-5}{3a}$ で
$\frac{3a-5}{3a}<\frac{a-1}{a}$

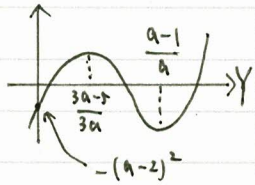
増減表は、

| Y | 0 | | $\frac{3a-5}{3a}$ | | $\frac{a-1}{a}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I'(Y)$ | | + | 0 | − | 0 | + |
| $I(Y)$ | $I(0)$ | ↗ | $I(\frac{3a-5}{3a})$ | ↘ | $I(\frac{a-1}{a})$ | ↗ |

$I(0)=-a^2+4a-4=-(a-2)^2\leqq 0$　（$a\neq 2$で負の値）

$I(\frac{3a-5}{3a})=\cdots$（激しい計算）$\cdots=\frac{27a-50}{27a}$

$I(\frac{a-1}{a})=\cdots$（激しい計算）$\cdots=\frac{a-2}{a}$




$I(\frac{3a-5}{3a})>0$ かつ $I(\frac{a-1}{a})<0$ を解くと、

$\frac{50}{27}<a<2$　（右辺かは、右上図のように3解を持つ）　//

解法①をただ計算を面倒にした非現実的な解法。

## 解法③ 連立するが、xもyも消去せずに、何とかならないか

C: $y=ax^3-2x$
D: $x^2+y^2=1$

の2式から、xもyも残して、方程式が解けないか、喰らいついてみる。
$(\square x+\triangle y+\square)(\bigcirc x+\triangle y+\square)=0$
のような形が作れれば筆が進むのだが、作れず、断念。

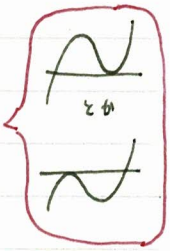
## 解法④ xの6次方程式が重解を持つ条件

$a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0$ が重解を持つ条件を考察。
これは、偶関数（xの偶数乗しか登場しない）なので、
ある解$\alpha$を持つて$-\alpha$も解になる（$\alpha\neq 0$）
よって、検討したい状態（CとDが接する）は、
$x>0$ の部分だけで重解になる条件を考察すればよく、$x^2=X$ と置換した後の
$h(X)=a^2X^3-4aX^2+5X-1$ について、
$h(X)=0$ が X の重解を持てばよい。

1枚目には書いたが、接する条件は、6個の解を持つ条件を直接求めているわけではなく、CとDが接する場合から間接的に求めている。
そのため、記述によって「誤得」をしておきました。

## 解法④-1

$h(X)=0$ が $X>0$ に重解を持つとき
$y=h(X)$ の極大値や極小値が0になる。
よって、$h(\frac{1}{a})=0$ や、$h(\frac{5}{3a})=0$ を解き
$a=2, \frac{50}{27}$




ほとんど解法①と同じ（というか、解法①をややこしくしただけ）
なので、解法の1つとカウントしません。

## 解法④-2　解と係数の関係を利用

$h(X)=0$ が、重解を持つので、
$h(X)=0$ の3解を、$\alpha, \alpha, \beta$ とおく。
$h(X)=a^2X^3-4aX^2+5X-1=0$ で、解と係数の関係から、

Date

# 2021年　東大数学　文系第1問 ⑤

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta=\dfrac{4a}{a^2} \cdots (i) \\ \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta=\dfrac{5}{a^2} \cdots (ii) \\ \alpha\cdot\alpha\cdot\beta=\dfrac{1}{a^2} \cdots (iii) \end{cases}$$

$\alpha, \beta, a$ の3文字に対して、3本の等式なので、連立方程式を解くだけ。

(i) より　$2\alpha+\beta=\dfrac{4}{a}$　$\therefore \dfrac{1}{a}=\dfrac{2\alpha+\beta}{4}$ … (iv)　← $a$ を消去

(iii) に代入して.　$\alpha^2\beta=\left(\dfrac{2\alpha+\beta}{4}\right)^2$

$16\alpha^2\beta=4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$ … (v)

要するに連立方程式を解いている。

(iii) を (ii) に代入して.

$\alpha^2+2\alpha\beta=5\times\alpha^2\beta$　$\therefore \alpha^2\beta=\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta}{5}$

(v) に代入して

$16\cdot\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta}{5}=4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$

(整理して)　$4\alpha^2-12\alpha\beta+5\beta^2=0$

$(2\alpha-\beta)(2\alpha-5\beta)=0$

$\therefore \beta=2\alpha, \dfrac{2}{5}\alpha$

(A) $\beta=2\alpha$ のとき

(i) …　$4\alpha=\dfrac{4}{a}$　$\therefore \alpha=\dfrac{1}{a}$

(ii) …　$\alpha^2+4\alpha^2=\dfrac{5}{a^2}$　$\therefore \alpha^2=\dfrac{1}{a^2}$ (iと同じ)

(iii) …　$2\alpha^3=\dfrac{1}{a^2}$

$=\alpha^2$　← (i) から得られた $\alpha=\dfrac{1}{a}$ を代入

$\therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$　($\alpha$ は $h(x)=0$ の正の解なので $\alpha\neq 0$)

$\beta=2\alpha=1$

$a=\dfrac{1}{\alpha}=2$　よって　$a=2$.

(B) $\beta=\dfrac{2}{5}\alpha$ のとき.

(i) …　$2\alpha+\dfrac{2}{5}\alpha=\dfrac{4}{a}$　$\therefore \dfrac{3}{5}\alpha=\dfrac{1}{a}$

(ii) …　$\alpha^2+\dfrac{4}{5}\alpha^2=\dfrac{5}{a^2}$　$\therefore \dfrac{9}{5}\alpha^2=\dfrac{5}{a^2}$

(iii) …　$\alpha^2\times\dfrac{2}{5}\alpha=\dfrac{1}{a^2}$　$\therefore \dfrac{2}{5}\alpha^3=\dfrac{1}{a^2}$

代入

$\dfrac{2}{5}\alpha^3=\left(\dfrac{3}{5}\alpha\right)^2$

$\alpha=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3^2}{5^2}=\dfrac{9}{10}$　$\beta=\dfrac{2}{5}\alpha=\dfrac{9}{25}$　$a=\dfrac{5}{3\alpha}=\dfrac{50}{27}$

以上. 適する場合の $a$ は $a=2, \dfrac{50}{27}$ なので.

$\dfrac{50}{27}<a<2$ //

## 解法 ⑤　④と同じように重解条件 (x消去, y残し)

CとDから. xを消去すると.

$a^2y^6+(-3a^2+4a)y^4+(3a^2-8a+5)y^2-a^2+4a-4=0$

④と同じ理由で. $y^2=Y$ とおくと.

$I(Y)=a^2Y^3+(-3a^2+4a)Y^2+(3a^2-8a+5)Y-a^2+4a-4=0$

解を $\alpha, \alpha, \beta$ とおき. 解と係数の関係から.

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta=\dfrac{1}{a^2}(3a^2-4a) \\ \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta=\dfrac{1}{a^2}(3a^2-8a+5) \\ \alpha^2\beta=\dfrac{1}{a^2}(a^2-4a+4) \end{cases}$$

この、$\alpha$ と $\beta$ と $a$ の3元連立方程式は計算が苦痛で解けませんでした。
解ければ答えが出るのはわかっていますが、断念します。

ちなみに、解法② で示したのを利用し.
$Y=I(Y)$ の極値が0になるとしても解けます。

極値は.　$I\left(\dfrac{a-1}{a}\right)=\dfrac{a-2}{a}=0$　$\therefore a=2$

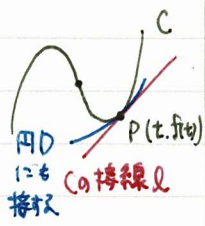
$I\left(\dfrac{3a-5}{3a}\right)=\dfrac{2a-50}{27a}$　$\therefore a=\dfrac{50}{27}$

2021年　東大 数学　文系第1問 ⑥

解法⑥ ～ ⑲ は、似ている解法が多く登場するため、横にしに繋しながらご覧下さい。

## C上に P(t, f(t)) をおいて処理

### 解法⑥⑦ lが円Dに接する。




点P(t, f(t))が円D上にあるので、
$x^2+y^2=1$ に代入して、
$t^2+\{f(t)\}^2=1$
$t^2+(at^3-2t)^2=1$
$\therefore\ a^2t^6-4at^4+5t^2-1=0$ ・・・(*)

また、接線 l : $y=f'(t)(x-t)+f(t)$
$y=(3at^2-2)(x-t)+at^3-2t$
$y=(3at^2-2)x-2at^3$
が円Cに接する。

### 解法⑥ 点と直線の距離の公式を利用。dニト

lと円Dの中心との距離dが
円Dの半径と一致すればよい。

$$d=\frac{|0+0-2at^3|}{\sqrt{(3at^2-2)^2+(-1)^2}}=1$$

2乗して分母をはらう

$(-2at^3)^2=(3at^2-2)^2+1$
$4a^2t^6-9a^2t^4+12at^2-5=0$ ・・・Ⓐ

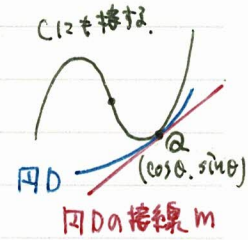
### 解法⑦ 連立して(判別式)=0

lと円Dを連立して、
$x^2+\{(3at^2-2)x-2at^3\}^2=1$
$\{1+(3at^2-2)^2\}x^2-4at^3(3at^2-2)x+4a^2t^6-1=0$
接するとき、(判別式)=0 となので、
$(\text{判別式})/4=\{-2at^3(3at^2-2)\}^2-\{1+(3at^2-2)^2\}(4a^2t^6-1)=0$
⋮ (頑張る)
$=4a^2t^6-9a^2t^4+12at^2-5=0$ ・・・Ⓐ

(*)かつⒶを解けばよいのだが、これも計算が激烈すぎて、断念しました。

## 円D上に点Q(cosθ, sinθ)をおいて処理

### 解法⑧⑨ mがCに接する




点Q(cosθ, sinθ)がC: $y=f(x)$ 上にあるので、$y=f(x)$ に代入して、
$\sin\theta=a\cos^3\theta-2\cos\theta$ ・・・(**)

また、接線 m : $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$
が、C: $y=f(x)=ax^3-2x$ に接する。連立して
$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{1}{\sin\theta}=ax^3-2x$
$a\sin\theta\cdot x^3+(\cos\theta-2\sin\theta)x-1=0$
これが重解を持つ。

### 解法⑧ 極値=0を利用。

$f(x)=a\sin\theta\cdot x^3+(\cos\theta-2\sin\theta)x-1$ とおき、
f(x)の極値=0となればよい、として、
$f'(x)=0$ の解、αとβを用い、$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$
を解こうとするも、計算が激しく断念

### 解法⑨ 解と係数の関係を利用

$f(x)=0$ の解を、α, α, βとおくと、

$$\begin{cases}\alpha+\alpha+\beta=0\\ \alpha^2+2\alpha\beta=\dfrac{\cos\theta-2\sin\theta}{a\sin\theta}\\ \alpha^2\beta=\dfrac{1}{a\sin\theta}\end{cases}$$

この3式から、βとθを消去し、aとαを残すと、
$4a^2\alpha^6-9a^2\alpha^4+12a\alpha^2-5=0$
となり Ⓐ の tをαに変えた式が得られる。

解法⑧⑨と同様に、これも断念

Date

# 2021年　東大数学　文系第1問⑦

## 解法⑩　$l$ が、円Dの接線と一致する。

$l$ : $y = f'(t)(x-t) + f(t)$

$(3at^2-2)x - y - 2at^3 = 0$

が、点 $P(t,\ f(t))$ における円Dの接線

$t\cdot x + f(t)\,y = 1$

$tx + (at^3-2t)y - 1 = 0$ と一致する。

$$\begin{cases} (3at^2-2)x - y - 2at^3 = 0 \\ tx + (at^3-2t)y - 1 = 0 \end{cases} \times(2at^3)$$

$$\begin{cases} (3at^2-2)x - y - 2at^3 = 0 \\ 2at^4 x + (2at^3)(at^3-2t)y - 2at^3 = 0 \end{cases}$$

よって、

$3at^2 - 2 = 2at^4$ … (i)

$-1 = 2at^3(at^3-2t)$ … (ii)

また、(*) $\Leftrightarrow a^2t^6 - 4at^4 + 5t^2 - 1 = 0$ … (iii) も利用できる

(i)(ii)(iii) の3式から、$a$ と $t$ を求める。

($t$ の次数を下げ) $t^2 = \dfrac{1}{6a-10}$ を代入し、

$27a^2 - 104a + 100 = 0$

$(a-2)(27a-50) = 0$　　$\therefore\ a = 2,\ \dfrac{50}{27}$

コメント

解法⑩も⑪も、接線一致の設計

だが、できるも、$a$ の値が出た。

計算は面倒。

## 解法⑪　$m$ が、Cの接線と一致する

$m$ : $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$

が、点 $Q(\cos\theta,\ \sin\theta)$ におけるCの接線。

$y - f(\cos\theta) = f'(\cos\theta)(x - \cos\theta)$

$(3a\cos^2\theta - 2)x - y - 2a\cos^3\theta = 0$ と一致する。

$$\begin{cases} (\cos\theta)x + (\sin\theta)y - 1 = 0 \\ (3a\cos^2\theta - 2)x - y - 2a\cos^3\theta = 0 \end{cases} \times(-\sin\theta)$$

$$\begin{cases} (\cos\theta)x + (\sin\theta)y - 1 = 0 \\ -\sin\theta(3a\cos^2\theta - 2)x + (\sin\theta)y + 2a\cos^3\theta\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$\cos\theta = -\sin\theta(3a\cos^2\theta - 2)$ … (i)

$-1 = 2a\cos^3\theta\sin\theta$ … (ii)

また、(**) $\Leftrightarrow \sin\theta = a\cos^3\theta - 2\cos\theta$ … (iii) も利用できる。

(i)(ii)(iii) の3式から、$a$ と $\theta$ を求める。

(iii) $\Leftrightarrow a\cos^3\theta = \sin\theta + 2\cos\theta$ を (ii) に代入し

$-1 = 2\sin\theta(\sin\theta + 2\cos\theta)$

$2\sin 2\theta - \cos 2\theta = -2$

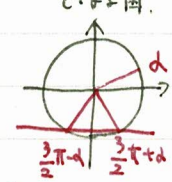
$\sqrt{5}\sin(2\theta - \alpha) = -2$　　但し、$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$-\alpha \leqq 2\theta - \alpha \leqq 4\pi - \alpha$ で、

$\sin(2\theta - \alpha) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となる角を探すと、

$2\theta - \alpha = \dfrac{3}{2}\pi - \alpha,\ \dfrac{3}{2}\pi + \alpha,\ \dfrac{7}{2}\pi - \alpha,\ \dfrac{7}{2}\pi + \alpha$

$\theta = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi + \alpha,\ \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi + \alpha$




このうち、(i)〜(iii) を満たすのは $\theta = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi + \alpha$ の2つ

$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき、$a = 2$

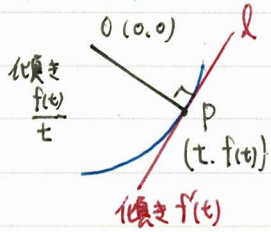
$\theta = \dfrac{7}{4}\pi + \alpha$ のとき、$a = \dfrac{50}{27}$　$\left(\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

よって　$a = 2,\ \dfrac{50}{27}$

Date

# 2021年　東大数学.　文系第1問.⑧

## 解法⑫　(傾き)×(傾き)=-1 の直交条件




OP⊥ℓ なので.

$\frac{f(t)}{t} \times f'(t) = -1$ … ☆

$\frac{at^3-2t}{t} \times (3at^2-2) = -1$

$3a^2t^4 - 8at^2 + 5 = 0$

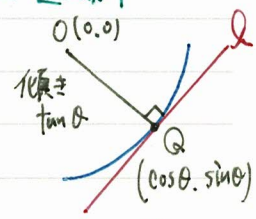
$(3at^2-5)(at^2-1) = 0$　∴ $t^2 = \frac{1}{a}, \frac{5}{3a}$ … Ⓑ

(*) $a^3t^6 - 4at^4 + 5t^2 - 1 = 0$ も成立するので代入すると.

(i) $t^2 = \frac{1}{a}$ のとき.　$a = 2$.

(ii) $t^2 = \frac{5}{3a}$ のとき.　$a = \frac{50}{27}$　∴ $a = 2, \frac{50}{27}$

## 解法⑬　(傾き)×(傾き)=-1 の直交条件




OQ⊥ℓ なので.

$\tan\theta \times f'(\cos\theta) = -1$

$\tan\theta \cdot (3a\cos^2\theta - 2) = -1$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot (3a\cos^2\theta - 2) = -1$ … ☆☆

また. (**) $\sin\theta = a\cos^3\theta - 2\cos\theta$ も成立するので代入すると.

$\frac{a\cos^3\theta - 2\cos\theta}{\cos\theta}(3a\cos^2\theta - 2) = -1$ … ☆☆☆　Ⓑと同じ

$= \cdots = (a\cos^2\theta - 1)(3a\cos^2\theta - 5) = 0$　$a\cos^2\theta = 1, \frac{5}{3}$

(i) $a\cos^2\theta = 1$ を☆☆に代入して. $\tan\theta = 1$　∴ $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$　$a = 2$.

(ii) $a\cos^2\theta = \frac{5}{3}$ を☆☆に代入して. $\tan\theta = -\frac{1}{3}$　∴ $\cos^2\theta = \frac{9}{10}$　$a = \frac{50}{27}$

## 解法⑭　内積=0 で直交条件

$\overrightarrow{OP} = (t. f(t))$ と. ℓの方向ベクトル $(1. f'(t))$ が直交する.

$(t. f(t)) \cdot (1. f'(t)) = 0$

$t + f(t) \cdot f'(t) = 0$ … ☆と同じ　(以下⑫と同じ)

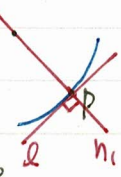
## 解法⑮　内積=0 で直交条件

$\overrightarrow{OQ} = (\cos\theta. \sin\theta)$ と. ℓの方向ベクトル $(1. f'(\cos\theta))$ が直交する.

$(\cos\theta. \sin\theta) \cdot (1. 3a\cos^2\theta - 2) = 0$

$\cos\theta + \sin\theta(3a\cos^2\theta - 2) = 0$ … ☆☆と同じ. (以下⑬と同じ)

## 解法⑯　法線が原点を通る




法線 $n_1$ : $y = -\frac{1}{f'(t)}(x - t) + f(t)$

が原点を通る。

$0 = -\frac{1}{f'(t)}(0 - t) + f(t)$

∴ $\frac{t}{f'(t)} + f(t) = 0$ … ☆と同じ.

(以下⑫と同じ)

## 解法⑰　法線が原点を通る

法線 $n_2$ : $y = -\frac{1}{f'(\cos\theta)}(x - \cos\theta) + f(\cos\theta)$

が原点を通る。

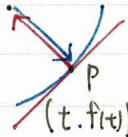
$0 = -\frac{-\cos\theta}{f'(\cos\theta)} + f(\cos\theta)$

$\frac{a\cos^3\theta - 2\cos\theta}{\cos\theta}(3a\cos^2\theta - 2) = -1$ と変形できる

☆☆☆と同じ式

以下⑬と同じ.

## 解法⑱　ベクトルの平行条件




ℓ : $f'(t)x - y - tf'(t) + f(t) = 0$ の法線ベクトル

$(f'(t), -1)$ が.

$\overrightarrow{OP} = (t. f(t))$ と平行なので.

$(f'(t), -1) = k(t. f(t))$ となる実数 $k$ が存在

$\begin{cases} f'(t) = kt \\ -1 = kf(t) \end{cases}$　$k$ を消去すると. $\frac{f(t)}{t} = \frac{-1}{f'(t)}$ … ☆と同じ

(以下⑬と同じ)

## 解法⑲　ベクトルの平行条件

ℓ : $f'(\cos\theta)x - y - tf'(\cos\theta) + f(\cos\theta) = 0$ の法線ベクトル

$(f'(\cos\theta), -1)$ が. $\overrightarrow{OQ} = (\cos\theta. \sin\theta)$ と平行なので.

$(f'(\cos\theta), -1) = k(\cos\theta. \sin\theta)$

$\begin{cases} f'(\cos\theta) = k\cos\theta \\ -1 = k\sin\theta \end{cases}$　$k$ を消去すると. $\frac{f'(\cos\theta)}{\cos\theta} = \frac{-1}{\sin\theta}$

☆☆と同じ

(以下⑬と同じ)