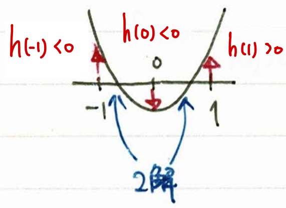
2021年　　東大数学　　文系 第3問　　理系第1問①

$f(x) = x^2 + ax + b$
$g(x) = -x^2$　　とおく。

(1)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2つの共有点を持つため
$f(x) - g(x) = 0$ が、異なる2つの実数解を持つ。

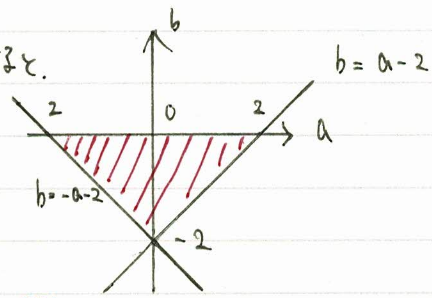
$h(x) = f(x) - g(x)$　とおくと
$h(x) = 2x^2 + ax + b$　であるが、

$$\begin{cases} h(-1) > 0 \\ h(0) < 0 \\ h(1) > 0 \end{cases}$$
を満たせばよい。



$$\begin{cases} h(-1) = 2 - a + b > 0 & b > a - 2 \cdots ① \\ h(0) = 0 + 0 + b < 0 & b < 0 \cdots ② \\ h(1) = 2 + a + b > 0 & b > -a - 2 \cdots ③ \end{cases}$$

これを図示すると、



境界含まず。

(2)　解法を7つ紹介します。

	逆像法	順像法
aとbを両方とも動かす	解法1. 線型計画法 2. 線型計画法	5. 難 今回は ムリ
a 固定	3. bから解の配置	6. bからファクシミリ
b 固定	4. aから解の配置	7. aからファクシミリ

解法1~4 逆像法＝解の配置

パラメータである (a, b) が解を持つ条件を調べることで
(x, y) の通過する領域を求める。

逆像 (a, b) が存在すれば、(x, y) が存在するはず
という理論。

解法1　　パラメータ2つ。

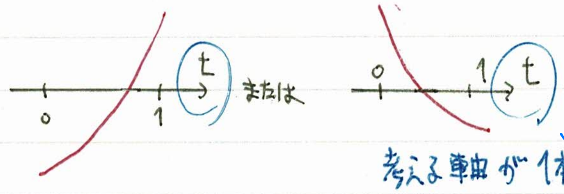
$y = f(x)$　　$y = x^2 + ax + b$　が
(1) で求めた ①②③ を満たせばよい。

パラメータが a と b。解法1では両方動かすので、
存在範囲が (1) の答えのように、領域で与えられ
困る。

復習用の例題

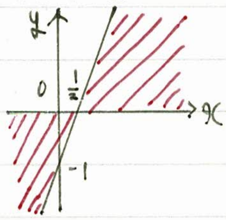
Q. $y = 2tx - t^2$ が $0<t<1$ で通過する領域は?

A. $I(t) = t^2 - 2xt + y = 0$ が $0<t<1$ に解を持てばよい。　パラメータは t の1つなので、



考える軸が1本

よって
$I(0) \cdot I(1) < 0$
$(0 - 0 + y)(1 - 2x + y) < 0$
$y(y + 2x - 1) < 0$
図示すると、



今回の問題は、
パラメータがaとbの2つ
すると、どうなるかということ…

$y = f(x) \iff b = -xa + y - x^2$　として、
ab平面で、傾き $-x$、切片 $y - x^2$ の
直線とみなす。

この直線が、(1) の領域と共有点を持つような
条件を考える。　　つまり 線型計画法に帰着。

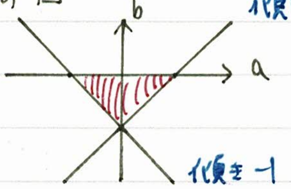
$$\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$
制

かつ　$y = x^2 + ax + b$ となる (a, b) が存在
2文字　目

$\iff$ (x, y) の通過領域

2021年 東大数学 文系第3問 理系第1問②

再掲 (1)の図



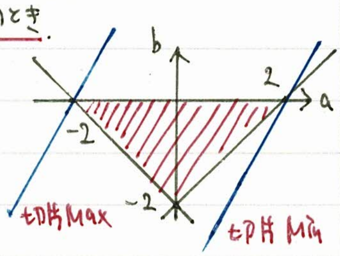
$b = \underset{\text{傾き}-x}{-x}\,a + \underset{\text{切片}\,y-x^2}{(y-x^2)}$

$\Leftrightarrow\ y - x^2 = b + ax$

よって 4つの傾き、$-1, 0, 1, -x$ の比較をする。

(i) $1 \leqq -x$ つまり、$x \leqq -1$ のとき

{(−2,0)を通るとき、切片Max
{(2,0)を通るとき 切片Min



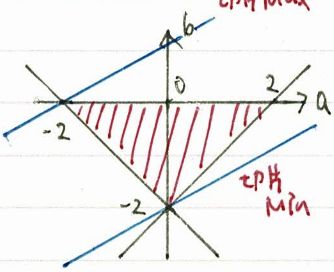
$(\text{切片}) = y - x^2 = b + xa$ なので、

$2x + 0 \leqq y - x^2 \leqq -2x + 0$

$x^2 + 2x \leqq y \leqq x^2 - 2x$

(ii) $0 \leqq -x \leqq 1$ つまり $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき

{(−2,0)を通るとき 切片Max
{(0,−2)を通るとき 切片Min



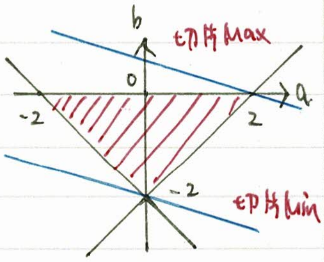
よって

$0 - 2 \leqq y - x^2 \leqq -2x + 0$

$x^2 - 2 \leqq y \leqq x^2 - 2x$

(iii) $-1 \leqq -x \leqq 0$ つまり $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

{(2,0)を通るとき、切片Max
{(0,−2)を通るとき 切片Min



よって

$-2 + 0 \leqq y - x^2 \leqq 0 + 2x$

$x^2 - 2 \leqq y \leqq x^2 + 2x$

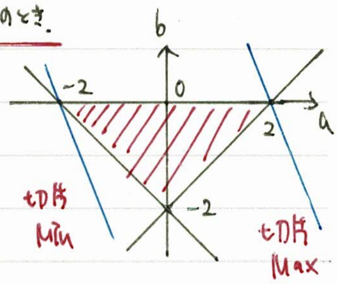
$\begin{cases} 2x+y \leqq 11 \\ x+3y \leqq 13 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$ 制 より) $2x+3y=k$ 目 とおくと (x, y)が存在

$\Leftrightarrow$ kの値域

2文字なので、線型計画法

(iv) $-x \leqq -1$ つまり $1 \leqq x$ のとき

{(2,0)を通るとき 切片Max
{(−2,0)を通るとき 切片Min



よって

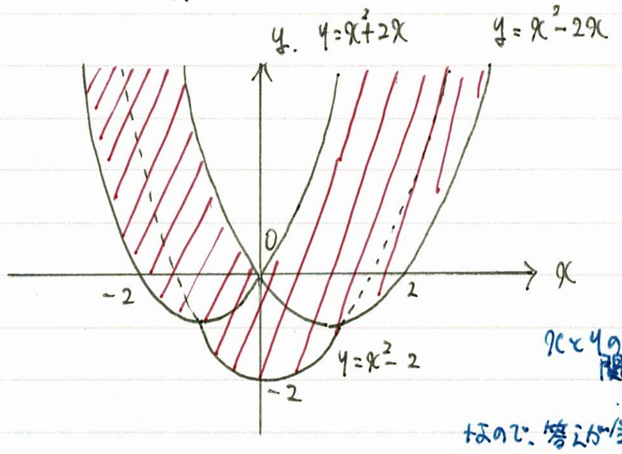
$0 - 2x \leqq y - x^2 \leqq 0 + 2x$

$x^2 - 2x \leqq y \leqq x^2 + 2x$

以上をまとめると、

$$\begin{cases} x \leqq -1 \text{ のとき、} & x^2+2x \leqq y \leqq x^2-2x \\ -1 \leqq x \leqq 0 \quad 〃 & x^2-2 \leqq y \leqq x^2-2x \\ 0 \leqq x \leqq 1 \quad 〃 & x^2-2 \leqq y \leqq x^2+2x \\ 1 \leqq x \quad 〃 & x^2-2x \leqq y \leqq x^2+2x \end{cases}$$

これを図示して。



xとyの2文字の関係を求める問題 なので、答えが領域ででる。

参考

Q. $2x+y \leqq 11$、$x+3y \leqq 13$、$x \geqq 0$、$y \geqq 0$ を満たす $2x+3y=k$ として、kの範囲を求めよ。

求める範囲は、k 1文字の問題のときは、

A. (4,3)を通るとき、

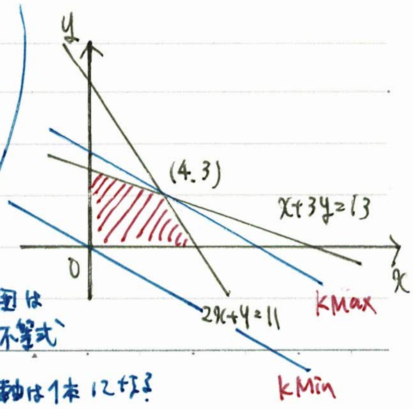
kのMax、$2 \times 4 + 3 \times 3 = 17$

(0,0)を通るとき、

kのMin $0+0=0$

よって $0 \leqq k \leqq 17$

kの範囲は1本の不等式



軸は1本になる

2021年　東大数学　文系第3問　理系第1問③

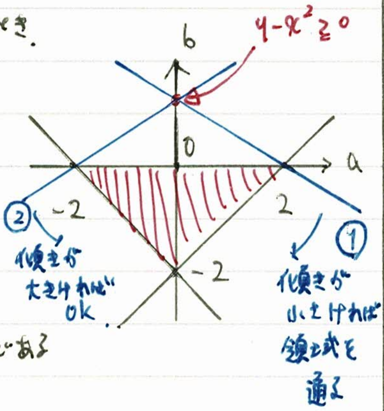
解法2

解法1と違う場合分けの方針で解く。

$b = \underbrace{-x \cdot a}_{\text{傾き}} + \underbrace{(y-x^2)}_{\text{切片}}$

解法1では、傾きで場合わけしたので、解法2では、切片で場合わけしてみる。

(i) $y-x^2 \geqq 0 \iff y \geqq x^2$ のとき。（切片）



右図のように、直線が、(i)の領域を通ればよいのだが、それは、

① よりも傾きが小さい　または、

② 〃 大きい　ときである

① のように、(2, 0) を通る時の傾きは、

$\frac{0-(y-x^2)}{2-0} = \frac{x^2-y}{2}$ なので、

$\underbrace{-x}_{\text{傾き}} < \underbrace{\frac{x^2-y}{2}}_{①}$ $\therefore$ $y < x^2+2x$

② のように (−2, 0) を通る時の傾きは、

$\frac{0-(y-x^2)}{-2-0} = \frac{y-x^2}{2}$ なので、

$\underbrace{-x}_{\text{傾き}} > \underbrace{\frac{y-x^2}{2}}_{②}$ $\therefore$ $y < x^2-2x$.

以上より、

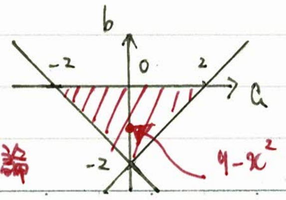
$y \geqq x^2$ かつ「$y < x^2+2x$ または $y < x^2-2x$.」 (i)の結論

(ii) $-2 \leqq \underbrace{y-x^2}_{\text{切片}} \leqq 0$ のとき。

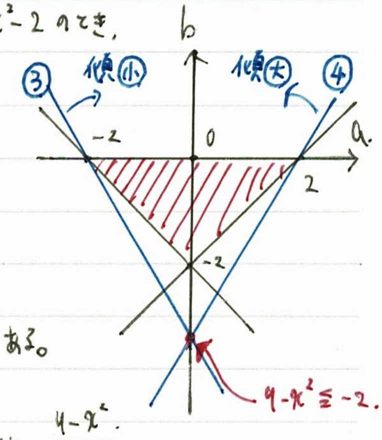
必ず領域を通る。

よって

$x^2-2 \leqq y \leqq x^2$ (ii)の結論



(iii) $\underbrace{y-x^2}_{\text{切片}} \leqq -2 \iff y \leqq x^2-2$ のとき。



右図のように、直線が、(i)の領域を通れば、よいのだが、それは、

③ よりも傾きが小さく

④ 〃 大きいときである。

③ のように (−2, 0) を通る傾きは $\frac{y-x^2}{2}$

なので、

$-x < \frac{y-x^2}{2}$ $\therefore$ $y > x^2-2x$

④ のように (2, 0) を通る傾きは、$\frac{x^2-y}{2}$

なので、

$-x > \frac{x^2-y}{2}$ $y > x^2+2x$.

以上より、$y \leqq x^2-2$ かつ「$y > x^2-2x$ または $y > x^2+2x$」

(iii)の結論

(i) (ii) (iii) の結論を「または」で結んだ領域を図示すると．（以下略）

> **Point.**
> 傾きで場合わけをすることが多いですが、
> このように、切片で場合わけもできます。

2021年　東大数学　文系第3問　理系第1問④

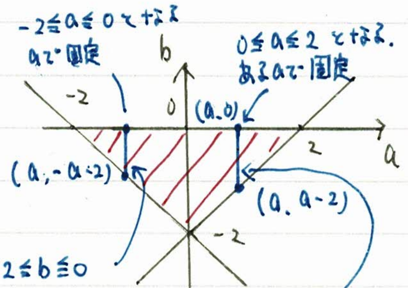
解法3 以降に移る前に、下準備

(1) で求めた領域は、

$$\begin{cases} ①\ b > a-2 \\ ②\ b < 0 \\ ③\ b > -a-2 \end{cases}$$

と表現されていたが、違う表現で表すと

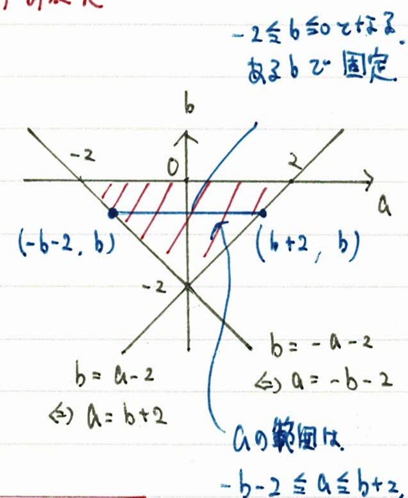
@ aを固定して考えると、右図のように bの範囲が得られる。



$$\boxed{\begin{array}{ll} -2 \leqq a \leqq 0 \text{ で } & -a-2 \leqq b \leqq 0 \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ で } & a-2 \leqq b \leqq 0 \end{array}}$$ — (※)

これが、(1) の領域の別表現

@ bを固定して考えると、右図のように aの範囲が得られる



$$\boxed{-2 \leqq b \leqq 0 \text{ で } -b-2 \leqq a \leqq b+2}$$ — (※※)

これも、(1) の領域の別表現

(※) と比べると、場合分けがないため、カンタンかつシンプル。

以上のように、(※) や (※※) のようにも表現できる。

これを踏まえて、解法3 以降へ。

Point

①②③ は aとbが連動して動く(従属)けど、

(※) と (※※) は別々に動かせる(独立)。これを利用する。

解法3 逆像法=解の配置　bから先に配置。

$y = f(x) \iff b = y - x^2 - ax$

これを、(※) に代入すると、　← 一応、1次方程式の解の配置をやっている

$$\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 0 \text{ で } & -a-2 \leqq y-x^2-ax \leqq 0 \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ で } & a-2 \leqq y-x^2-ax \leqq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 0 \text{ で } & (x-1)a \leqq y-x^2+2 \text{ かつ } ax \geqq y-x^2 \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ で } & (x+1)a \leqq y-x^2+2 \text{ かつ } ax \geqq y-x^2. \end{cases}$$

(※) を利用することで、独立(バラバラ)に動く aとbのうち、bを消去できた。

このあと、上の不等式を満たす aが存在する条件を求める。

(i) $x < -1$ のとき、

$x-1 < 0$　$x < 0$　$x+1 < 0$ なので、

上の不等式は、

$$\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 0 \text{ で、} & a \geqq \dfrac{y-x^2+2}{x-1} \text{ かつ } a \leqq \dfrac{y-x^2}{x} \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ で } & a \geqq \dfrac{y-x^2+2}{x+1} \text{ かつ } a \leqq \dfrac{y-x^2}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 0 \text{ で } & \dfrac{y-x^2+2}{x-1} \leqq a \leqq \dfrac{y-x^2}{x} \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ で } & \dfrac{y-x^2+2}{x+1} \leqq a \leqq \dfrac{y-x^2}{x} \end{cases}$$

これらが解を持つとき
$$\begin{cases} \dfrac{y-x^2+2}{x-1} < 0 \text{ かつ } \dfrac{y-x^2}{x} > -2 \\ \dfrac{y-x^2+2}{x+1} < 2 \text{ かつ } \dfrac{y-x^2}{x} > 0 \end{cases}$$

これを解くと、 $x^2-2 \leqq y \leqq x^2-2x$ または、 $x^2+2x \leqq y \leqq x^2$

$x < -1$ のときの結論

$x=-1$、$-1<x<0$、$x=0$、$0<x<1$、$x=1$、$1<x$ の場合も同様に計算する。

Date

2021年　東大数学　文系第3問　理系第1問 ⑤

解法4 逆像法で. aから解の配置

$y=f(x)$ に対し. $x=0$ を代入すると. $y=0+0+b$ ∴ $y=b$

$x\neq0$ のとき, $y=f(x)$ ⇔ $a=\frac{y-x^2-b}{x}$

これを. (※※) に代入すると.

$-2\le b\le 0$ かつ $-b-2\le \frac{y-x^2-b}{x}\le b+2$.

(i) $x>0$ のとき

$-2\le b\le 0$ かつ. $(-x+1)b\le -x^2+2x+y$ かつ

$(x+1)b\ge y-x^2-2x$

(i)-① $0<x<1$ のとき.

$-2\le b\le 0$ かつ. $b\le \frac{y-x^2+2x}{-x+1}$ かつ $b\ge\frac{y-x^2-2x}{x+1}$

$-2\le b\le 0$ かつ $\frac{y-x^2-2x}{x+1}\le b\le \frac{y-x^2+2x}{-x+1}$

この2つの連立不等式が. 解を持つとき.

$\frac{y-x^2-2x}{x+1}\le 0$ かつ $\frac{y-x^2+2x}{-x+1}\ge -2$

$y\le x^2+2x$ かつ $y\ge x^2-2$ （∵ $x+1>0$, $-x+1>0$）

∴ $x^2-2\le y\le x^2+2x$

(i)-①の結論

$x>1$. $-1<x<0$. $x<-1$. $x=0,\pm1$ の場合も同様に計算する。(以下略)

ここに書いた方が良かった。

解法5 順像法で. aとbを動かす

結論：結局. 解6,7のように予選決勝法になってしまう.

$y=f(x)=ax+b+x^2$ について.

aとbを同時に動かして. yの値域を探る。

（つまり a,bの2変数関数）

しかし.
① $b>a-2$
② $b<0$
③ $b>-a-2$ のように. aとbが連動して.
(従属)

動いてしまうと. $ax+b$ の値域が, どの場合に大きくなるか（小さくなるか）わからない。

⇒ 結局. aとbの固定しないとわからない.

多変数関数は. 片方を固定するのが. 基本の考え方

補 aとbを動かして. 値域がわかるパターン.

$a^2+b^2+(何か)$ ⇒ 原点からの距離とみなす

$\frac{b-3}{a-2}$ ⇒ $(2,3)$ と (a,b) の傾き

a^2-2a+b^2-4b+9 ⇒ $(a-1)^2+(b-2)^2+4$ と平方完成をする.

解法5~7 順像法 = ファクシミリ論法.

$y=$（xとパラメータの式）とし.

右辺を. パラメータの関数とみなして. グラフを描く.

（値域を求める.）

解法6 順像法 aを固定して. 次にbを動かす

aを固定して.

$y=\underbrace{b}_{動く}+\underbrace{(x^2+ax)}_{固定}$

(※)より.

$-2\le a\le 0$ で	$-a-2\le b\le 0$
$0\le a\le 2$ で	$a-2\le b\le 0$

を利用し.

$-2\le a\le 0$ で $-a-2+(x^2+ax)\le y=b+(x^2+ax)\le 0+x^2+ax$

$0\le a\le 2$ で $a-2+(x^2+ax)\le y=b+(x^2+ax)\le 0+x^2+ax$

$-2\le a\le 0$ で $(x-1)a+x^2-2\le y\le xa+x^2$

$0\le a\le 2$ で $(x+1)a+x^2-2\le y\le xa+x^2$

$x\ge1$ の時.

$-2\le a\le 0$ で. $(x-1)a+x^2-2\le y\le xa+x^2$

傾き正　aにMinの−2を代入

傾き正　aにMaxの0を代入

よって. $-2(x-1)+x^2-2\le y\le x^2$

他の場合も同様に計算

$x^2-2x\le y\le x^2$ $1\le x$の結論

Date

2021年　東大数学　文系第3問　理系第1問 ⑥

解法1 順像法. bを固定して. aを先に動かす.

$y=f(x)$ を. bを固定して.

$y=\underbrace{xa}_{\text{傾き 動く}}+\underbrace{(x^2+b)}_{\text{固定}}$

(※※) より.

$\boxed{-2 \leqq b \leqq 0 \text{ で. } -b-2 \leqq a \leqq b+2.}$

を利用する。

$x \geqq 0$ のとき. $y=xa+(x^2+b)$ は. 傾き $\geqq 0$ なので.

aのMaxを代入したら. y Max

aのMin　:　y Min　となる。

よって

$x \geqq 0$ のとき. $(-b-2)x+x^2+b \leqq y \leqq (b+2)x+x^2+b$

$(-x+1)b+x^2-2x \leqq y \leqq (x+1)b+x^2+2x$

次は. bを動かす.

傾き $(-x+1)$ と $(x+1)$ の正負で場合分け

$x \geqq 1$ のとき. $(-x+1)b+x^2-2x \leqq y \leqq (x+1)b+x^2+2x$

傾き $(-x+1)$ も $(x+1)$ も 正なので.

(左辺)の $(-x+1)b+x^2-2x$ のMinは. $(-x+1)(-2)+x^2-2x$

$=x^2-2$

(右辺)の $(x+1)b+x^2+2x$ のMaxは $(x+1)\times 0+x^2+2x$

$=x^2+2x$

よって. $x^2-2 \leqq y \leqq x^2+2x$. $x \geqq 1$ の結論

$0 \leqq x \leqq 1$. $-1 \leqq x \leqq 0$. $x \leqq -1$ の

場合も同様.

逆像法. 順像法 の使い方と考え方.

を. しっかり理解しよう。