Date

2021年　東大数学　文系第2問 ①

(1)

例えば、$N=5$ の場合を考える。（Nが最小の場合）
1〜10から、隣り合わないように並べるが、
1は必ず選ぶため、2は必ず選ばない。
よって、3〜10から、4つ選ぶことになる。
列挙すると、　← 1は書いてない
(3, 5, 7, 9)　(3, 5, 7, 10)　(3, 5, 8, 10)
(3, 6, 8, 10)　(4, 6, 8, 10)　の5通り

ここで、書き出しながら、法則を探る。
見やすいように、上の5通りを、別の表現で書いてみる。

①	3	4	5	6	7	8	9	10
②	3	4	5	6	7	8	9	10
③	3	4	5	6	7	8	9	10
④	3	4	5	6	7	8	9	10
⑤	3	4	5	6	7	8	9	10

左は奇数
右は偶数
奇→偶の切り替わるポイントが左にズレる。

①は全て奇数。　　つまり
②は10から偶数　　全て奇数で1通り
③は8　：　　4つの偶数のどこで
④は6　：　　切り替わるかで4通り
⑤は4　：　　計 5通り

以上、答案用紙に書かず、（計算用紙などで）考えること。

ちなみに $N=6$ の場合も、列挙すると、
(3, 5, 7, 9, 11)　(3, 5, 7, 9, 12)　(3, 5, 7, 10, 12)
(3, 5, 8, 10, 12)　(3, 6, 8, 10, 12)　(4, 6, 8, 10, 12)
1は書いてません。　の6通り。

解法1

条件を満たす組は

A $\{1, 3, 5, \cdots, 2N-1\}$　← 全て奇数。

B $\{1, 3, 5, \cdots, 2k-1, 2k+2, 2k+4, \cdots, 2N\}$　← 途中で偶数
（但し $1 \leqq k \leqq N-1$ の整数）
奇→偶

Aは1通り、Bは $N-1$ 通りある。よって、N 通り。

k が $1 \leqq k \leqq N-1$ を満たす整数なので、数えて $N-1$ 通り。
もしくは、奇→偶に切り替わる時の偶数は、2以外の偶数なので、$N-1$ 通り と考える。

解法2

組 S に選ぶ／選ばない を ○ × で表す。

1	2	3	4	····	$2N$
○	×				

1と2は確定　　3〜$2N$ は不明。

3〜$2N$ の $2N-2$ こに対し、
$N-1$ 個ずつの ○と×を入れる。
その際、○が隣り合わないようにする。　→ ×を先に並べてスキマに○を入れる

$N-1$ 個の×を並べて、
両端かスキマに○を入れると考えると。

$N-1$ 個の×。

×　×　×　····　×　×

N か所の候補

よって、N 通り。

2021年　東大数学　文系第3問②

(2) 余事象をとると、場合分けが複雑になってしまうこと。
近年の東大では、丁寧に数え上げる問題が頻繁に出題されていること、などから
$N-2$ 連続する場合を（正面から）考察する。

解法1

問題の設定上、
$N-1$ 連続や、N 連続でも「$N-2$ 連続の部分を含む」とみなせる。
（{7.8.9.10} となっていても、{7.8.9} {8.9.10} の3連続があることになる。）
これに注意し、以下の場合分けをする。

(i) ちょうど N 連続する
(ii) ちょうど $N-1$ 連続する
(iii) ちょうど $N-2$ 連続する
の3つの場合に分ける。

(i) ちょうど N 連続する場合
$\{1, 2, 3, \cdots N\}$ となる 1通り のみ（1は必ず含む）

(ii) ちょうど $N-1$ 連続する場合

(ii)-① 連続する部分が1を含む場合
$1, 2, 3, \cdots, N-1$ の連続が確定し、もう1つの要素は、
$N+1 \sim 2N$（N通り）から選ぶことになる。
よって N 通り。

補
$$\underbrace{1, 2, 3, \cdots, N-1}_{N-1\text{連続で選ぶ}},\ N,\ \underbrace{N+1, N+2, \cdots 2N}_{\text{残り}N\text{コから1つ選ぶ}}$$
↑ コレを選ぶと N 連続になってしまう

(ii)-② 連続する部分が1を含まない場合
全部で N 個選ぶうち、1を必ず含み、
1以外の $N-1$ 連続を選ぶため、
選ぶ数は全て確定。

1以外の $N-1$ 連続する部分は、
{3, 4, … $N+1$} ← 3からスタート
{4, 5, … $N+2$} ← 4からスタート
⋮
{$N+2$, $N+3$, … $2N$} ← $2N$ で終わる

この N 通り。

すると、ここに注目すると、個数が考えやすい。
$N+1$ から $N+N$ なので、N 通り

一般的に、
整数 $a \sim b$ の個数は
$b-a+1$ 個。

(iii) ちょうど $N-2$ 連続する場合。

(iii)-① 連続する部分が1を含む場合。
$1, 2, 3, \cdots N-2$ が確定し、
$N \sim 2N$ から残り2個を選ぶ。
よって ${}_{N+1}C_2$ 通り。

補
$$\underbrace{1, 2, 3, \cdots N-2}_{N-2\text{連続で選ぶ}},\ N-1,\ \underbrace{N, N+1, \cdots 2N}_{\text{残り}N+1\text{コから2つ選ぶ}}$$
↑ コレを選ぶと $N-1$ 連続になってしまう

2021年　東大数学　文系第2問③

(iii)−② 連続する部分が1と2Nを含まない場合

・例えば、1と、3〜N を選んだ場合は、
$\underbrace{3 \sim N}_{N-2\text{連続}}$

$\underbrace{N+2 \sim 2N}_{N-1\text{通り}}$ のうち、最後の1つを選ぶ

よって、N−1通り。

1, 2, 3, 4, …, N, N+1, N+2, …, 2N　　$2N-(N+2)+1 = N-1$通り

・次に、1と $\underbrace{4 \sim N+1}_{N-2\text{連続}}$ を選んだ場合は、

2と、$\underbrace{N+3 \sim 2N}_{N-2\text{通り}}$ のうちから、最後の1つを選ぶ

よって N−1通り。

1, 2, 3, 4, … N+1, N+2, N+3, … 2N　　ココから選ぶ　$1+\{2N-(N+3)+1\} = 1+N-2 = N-1$

このように、1と2Nを含まずに、N−2連続の部分を選んだ場合、最後の1つの選び方は、N−1通りになる。

N−2連続の選び方は、

{3, 4, 5, … N}　← 3からスタート
{4, 5, 6, … N+1}　← 4　〃
{5, 6, 7, … N+2}　← 5　〃
⋮
{N+2, N+3, … 2N−1}　← 2N−1で終わる

のN通り。

スタートの数を見て
$N+2-3+1 = N$
終わりの数を見て
$2N-1-N+1 = N$
などと計算

よって $N \times (N-1)$ 通り

(iii)−③ 連続する部分が、2Nを含む場合。

1と、N+3〜2N が確定し、
最後の1つは、$\underbrace{2 \sim N+1}_{N\text{通り}}$ から選ぶ

よって N通り

1, 2, 3, 4, …N+1, ~~N+2~~, N+3, … 2N

$N+1-2+1 = N$ つから1つ選ぶ　　N−2連続

以上より、各場合の数が計算し終わった。

(i)　1通り
(ii)−①　N通り
　　−②　N通り
(iii)−①　${}_{N+1}C_2$ 通り
　　−②　$N(N-1)$ 通り
　　−③　N通り

合計し、

$$1+N+N+{}_{N+1}C_2+N(N-1)+N$$
$$=\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)\text{ 通り}$$

2021年　　東大数学　　文系第2問 ④

解法2.

解法1は、N連続、N-1連続、N-2連続の3つに場合分けしたが、
解法2は、N-2連続する部分の最小値で場合わけする。

(i) N-2連続する部分の最小値が1の場合.

$\underbrace{1, 2, 3, \cdots N-2}_{\text{ココがN-2連続}},\ \underbrace{N-1, N \cdots 2N}$

残り2つを、ココから選ぶ (N+2通り)

N-1も選べる.

注

解法1では「ちょうど」○○連続するとしていたが、
解法2では「ちょうど」ではなく、
N-2連続の部分が、どこかに存在すればよい
(実際には、N-1連続やN連続になってもよい)
という設定で考えている。

よって、$_{N+2}C_2$通り.

(ii) N-2連続する部分の最小値が1でない場合.

その最小値をkとする。

- k=1は、(i)で扱っている。
- k=2とすると、(1は必ず選ぶため)
  最小値が1となってしまう。よって $k \neq 2$.
- N-2連続の最大値を2Nとすると、
  N+3, N+4, …, 2N の連続となる。
  よって、kの最大値はN+3.

以上より　$3 \leqq k \leqq N+3$ で考察する。

つまり、kのとり方は
$N+3-3+1$
$=N+1$通り.

この場合、

N-2連続

1, 2, … k-2, k-1, $\boxed{k, k+1, \cdots k+N-3}$ k+N-2, … 2N

選ぶことが確定

コレを選ぶと、最小値がk-1になるので、選んではダメ。

この中から、どれか1つ選ぶ (N通り)

2〜k-2, k+N-2〜2N の中から1つ選ぶので、N通り.

kはN+1通りの選び方があるので、(3〜N+3)
全部で、N(N+1)通り.

以上より、
(i) $_{N+2}C_2$通り.
(ii) N(N+1)通り　を合計して、

$\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)$通り //