

(1)

例えば、 $N=5$ の場合を考える。(N が最小の場合)

1 ~ 10 から、隣り合わないように並べるが、

1 は必ず選ぶため、2 は必ず選ばない。

よって、3 ~ 10 から、4 つ選ぶことにする。

列挙すると、

(3, 5, 7, 9) (3, 5, 7, 10) (3, 5, 8, 10)

(3, 6, 8, 10) (4, 6, 8, 10) の5通り

ここで、書き出しながら、法則を探る

見やすいように、上の5通りを別の表現で書いてみる。

①	③	4	⑤	6	⑦	8	⑨	10	左は奇数 右は偶数 奇→偶の 切り替わる ポイントが 左にズレる
②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	⑩	
③	③	4	⑤	6	⑦	8	9	⑩	
④	③	4	5	⑥	7	8	9	⑩	
⑤	3	④	5	6	7	8	9	⑩	

- ① は 全奇数。 0 個
- ② は 10 から 偶数。 全奇数で 1 通り
- ③ は 8 : 4 つの 偶数 のことで
- ④ は 6 : 切り替わるが 4 通り
- ⑤ は 4 : 計 5 通り

以上、答案用紙に書かず、(計算用紙などで) 考えること。

ちなみに $N=6$ の場合も、列挙すると

(3, 5, 7, 9, 11) (3, 9, 7, 9, 12) (3, 5, 7, 10, 12)

(3, 5, 8, 10, 12) (3, 6, 8, 10, 12) (4, 6, 8, 10, 12)

1 は書いてません。 の6通り。

解法1

条件を満たす集合は

A {1, 3, 5, ..., 2N-1} ← 全奇数

B {1, 3, 5, ..., 2k-1, 2k+2, 2k+4, ..., 2N} ← 途中で偶数、奇→偶 (但し $1 \leq k \leq N-1$ の整数)

A は 1 通り、B は $N-1$ 通りある。よって、 N 通り

k が $1 \leq k \leq N-1$ を満たす整数ならば、数は $N-1$ 通り。もしくは、奇→偶に切り替わる時の偶数は、2以外の偶数ならば、 $N-1$ 通りと考える。

解法2

集合 B に選ぶ/選ばない を O X で表す。

1	2	3	4	...	2N
O	X				

1, 2 は確定 3 ~ 2N は、不明。

3 ~ 2N の $2N-2$ 2入りに対し、

$N-1$ 個ずつの O と X を入れる。

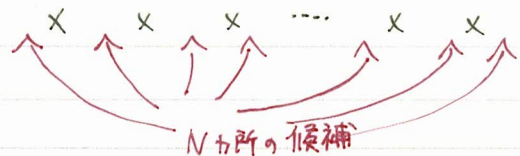
この際、O が隣り合わないようにする。

X を先に並べてスキップの O を入れる

$N-1$ 個の X を並べて、

両端がスキップの O を入れて考える。

$N-1$ 個の X



よって、 N 通り。

2021年

東大数学

女系第3問②

- (2) 余事象をとり、場合分けが複雑になら
しむこと。
近年の東大では、丁寧な教え上げの問題が
頻繁に出題されていること。 ながい。
N-2連続する場合を(正面から)考慮する。

解法1

問題の設定上、

N-1連続か、N連続でも、「N-2連続の部分
を含む」とみなせる。

({7,8,9,10} とはしても、{7,8,9} {8,9,10} の
連続があることにはなる)

これに注意し、以下の場合分けをする。

- (i) ちょうど N連続する。
- (ii) ちょうど N-1連続する
- (iii) ちょうど N-2連続する の3つの場合に
わけず。

(i) ちょうど N連続する場合

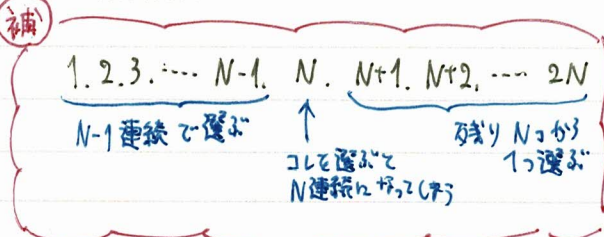
{1, 2, 3, ..., N} とはなる 1通り のみ。(1は必ず含む)

(ii) ちょうど N-1連続する場合

(ii)-① 連続する部分が1を含む場合

1, 2, 3, ..., N-1 の連続が確定しもう1つの要素は
N+1 ~ 2N (N通り) から選ぶことにはなる。
よって N通り

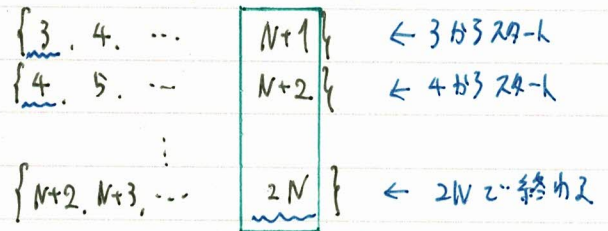
補



(ii)-② 連続する部分が1を含まない場合

全部で N個選ぶうち、1は必ず含み。
1以外の N-1連続を選ぶため。
選ぶ数は全て確定。

1以外の N-1連続する部分は、



この N通り

だけ。
ここには注目すると、個数が
考えやすい。

N+1 から N+N までの N通り

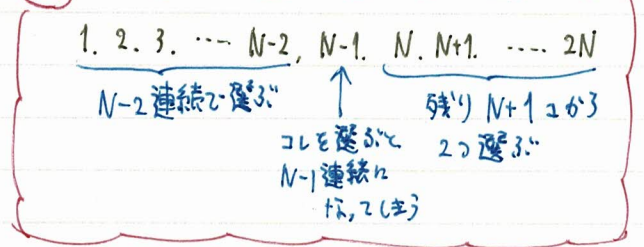
一般的に
整数 a ~ b の個数は
b - a + 1 個。

(ii) ちょうど N-2連続する場合

(iii)-① 連続する部分が1を含む場合

1, 2, 3, ..., N-2 が確定し、
N ~ 2N から残り2個を選ぶ。
よって N+1 C 2 通り。

補



2021年

東大数学

文系第2問③

(iii) - ② 連続する部分が1と2Nを含む場合

• 例えば、1と、3 ~ N を選んだ場合は、
 $N-2$ 連続

$N+2 \sim 2N$ のうち、最後の1つを選ぶ

$N-1$ 通り

よって、 $N-1$ 通り

① 2, 3, 4, ..., N, $N+1, N+2, \dots, 2N$ $2N - (N+1) + 1 = N-1$ 通り

• 次に、1と 4 ~ N+1 を選んだ場合は、
 $N-2$ 連続

2と、 $N+3 \sim 2N$ のうち、最後の1つを選ぶ

$N-2$ 通り

よって、 $N-1$ 通り

① 2, 3, 4, ..., $N+1, N+2, N+3, \dots, 2N$ $2N - (N+1) + 1 = N-1$ 通り

このように、1と2Nを含むは、 $N-2$ 連続の部分を選ぶ場合、最後の1つを選ぶのは、 $N-1$ 通り

よって

$N-2$ 連続の選ぶのは

{ 3, 4, 5, ..., N }	← 3からスタート
{ 4, 5, 6, ..., N+1 }	← 4 :
{ 5, 6, 7, ..., N+2 }	← 5 :

{ $N+2, N+3, \dots, 2N-1$ } ← $2N-1$ で終わる

の N 通り

スタートの数を見よ

$$N+2 - 3 + 1 = N$$

終わりの数を見よ

$$2N-1 - N + 1 = N$$

よって計算

よって $N \times (N-1)$ 通り

(iii) - ③ 連続する部分が、2Nを含む場合

1と、 $N+3 \sim 2N$ が確定し

最後の1つは、2 ~ N+1 から選ぶ

N 通り

よって N 通り

① 2, 3, 4, ..., ~~$N+2$~~ , $N+3, \dots, 2N$

$$N+1 - 2 + 1$$

$$= N \text{ からの } 1 \text{ 選ぶ}$$

$N-2$ 連続

以上より、各場合の数が計算(終わる)

(i) 1通り

(ii) - ① N 通り

② N 通り

(iii) - ① $N+1 C_2$ 通り

② $N(N-1)$ 通り

③ N 通り

合計し

$$1 + N + N + N+1 C_2 + N(N-1) + N$$

$$= \frac{1}{2} (N+1)(3N+2) \text{ 通り}$$

2021年

東大数学

文系第2問④

解法2.

解法1は、 N 連続、 $N-1$ 連続、 $N-2$ 連続の3つに場合分けしたが、

解法2は、 $N-2$ 連続する部分の最小値で場合分けする

(i) $N-2$ 連続する部分の最小値が1の場合.

1, 2, 3, ..., N-2, N-1, N, ..., 2N
 ココが $N-2$ 連続 残り2つをココから選ぶ ($N+2$ 通り)

① $N-1$ を選ぶ。
 解法1では「ちよび」〇〇連続するては、
 いちが、

解法2では「ちよび」では無く、
 $N-2$ 連続の部分から、どこかに存在すればよい
 (実際には、 $N-1$ 連続か N 連続に帰してもよい)
 という設定で考えている。

よって $N+2 C_2$ 通り。

(ii) $N-2$ 連続する部分の最小値が1ではない場合.

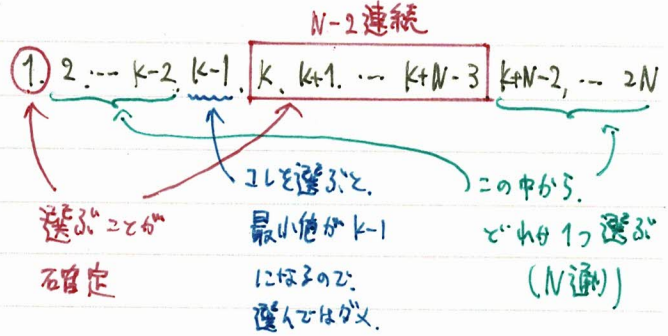
- その最小値を k とする。
- $k=1$ は、(i) で扱っている。
 - $k=2$ とすると、(1は必ず選ぶため)
 最小値が1となってしまう。よって $k \neq 2$ 。
 - $N-2$ 連続の最大値を $2N$ とすると、
 $N+3, N+4, \dots, 2N$ の連続となる。
 よって、 k の最大値は $N+3$ 。

以上より $3 \leq k \leq N+3$ を考察する。

つまり、 k のとり方は

$$N+3 - 3 + 1 = N+1 \text{ 通り}$$

この場合、



$2 \sim k-2, k+N-2 \sim 2N$
 の中から1つ選ぶので、 N 通り。

k は $N+1$ 通りの選ぶ方があり、 $(3 \sim N+3)$
 全部で、 $N(N+1)$ 通り。

以上より、

- (i) $N+2 C_2$ 通り。
- (ii) $N(N+1)$ 通り を合計して、

$\frac{1}{2} (N+1)(3N+2)$ 通り