2021年　東大数学　文系第4問　理系第4問　①

(1)

この問題では、合同式の法は、全て4で書いてます。

仮定より　$K \equiv L$

$KA = LB$　より

$KA \equiv LB$

↓ 移項

$KA - LB \equiv 0$

↓ $K \equiv L$

$KA - KB \equiv 0$

↓ 因数分解

$K(A-B) \equiv 0$

$K(A-B)$ は4の倍数

$K(A-B) = 4N$

ここで、Kは奇なので、4と互いに素なので

$A-B$ が4の倍数

$A-B \equiv 0$

$A \equiv B$

使う

Kは奇数なので、4とは互いに素

よって（Kは両辺から割れる）

$A - B \equiv 0$

$A \equiv B$

よって、題意は示された。

補

a, b, kが整数、aとbが互いに素のとき、

$ka \equiv 0 \pmod{b}$ ならば $k \equiv 0 \pmod{b}$

互いに素は割れる

(2)

方針の考察

具体的な数でやってみる。

$15 \times 8 = 5 \times 24$

正の奇数

2の素因数は全てココ

このように、AとBが含んでいる2の素因数の個数が等しいと、正の奇数K, Lを用いて

$KA = LB$ と表現できる。

$A = 2$　$B = 4$ とすると　$K \times 2 = L \times 4$ となる

奇数のK, Lは存在しない。

⇒ $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$ と $B = {}_aC_b$ の、素因数2の個数を比較する。

$A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$　とりあえず、具体的に書き出す。

$$= \frac{(4a+1)\times(4a)\times(4a-1)\times\cdots\times(4a-4b+1)}{(4b+1)\times(4b)\times(4b-1)\times\cdots\times 1}$$

（この、分母と分子の、素因数2の個数を数える。素因数2が、2つ以上の部分と、1つの部分を分離。）

$$= \frac{(4a+1)\times(4a-1)\times(4a-3)\cdots(4a-4b+1)}{(4b+1)\times(4b-1)\times(4b-3)\cdots 1}$$

← $\dfrac{(\text{奇数})①}{(\text{奇数})②}$ の部分

Xとおく

$$\times \frac{(4a)\times(4a-4)\times(4a-8)\times\cdots\times(4a-4b+4)}{(4b)\times(4b-4)\times(4b-8)\times\cdots\times 4}$$

← 4の倍数（素因数2が2つ以上）

Yとおく

$$\times \frac{(4a-2)\times(4a-6)\times(4a-10)\times\cdots\times(4a-4b+2)}{(4b-2)\times(4b-6)\times(4a-10)\times\cdots\times 2}$$

← 2×(奇数)（素因数2が1つだけ）

Zとおく

奇数の部分をX、4の倍数の部分をY、2×(奇数)の部分をZとおく。

YとZを約分してみる。

$$Y = \frac{(\cancel{4}a)\times(\cancel{4}a-\cancel{4})\times(\cancel{4}a-\cancel{8})\times\cdots\times(\cancel{4}a-\cancel{4}b+\cancel{4})}{(\cancel{4}b)\times(\cancel{4}b-\cancel{4})\times(\cancel{4}b-\cancel{8})\times\cdots\times\cancel{4}}$$

分母と分子で、4の個数がb個ずつ、わりきれちゃう。

$$= \frac{a\times(a-1)\times(a-2)\times\cdots\times(a-b+1)}{b\times(b-1)\times(b-2)\times\cdots\times 1}$$

$= {}_aC_b = B$　← なんと、$B = {}_aC_b$ が登場!!

$$Z = \frac{(\cancel{4}a-\cancel{2})\times(\cancel{4}a-\cancel{6})\times(\cancel{4}a-\cancel{10})\times\cdots\times(\cancel{4}a-\cancel{4}b+\cancel{2})}{(\cancel{4}b-\cancel{2})\times(\cancel{4}b-\cancel{6})\times(\cancel{4}b-\cancel{10})\times\cdots\times\cancel{2}}$$

ココもわりきれる。b個ずつの2がある。

$$= \frac{(2a-1)\times(2a-3)\times(2a-5)\times\cdots\times(2a-2b+1)}{(2b-1)\times(2b-3)\times(2b-5)\times\cdots\times 1}$$

分母、分子に登場するのは全て奇数

よって、$Z = \dfrac{(\text{奇数})③}{(\text{奇数})④}$ と表せる。

以上より　$A = X \times Y \times Z$

$$= \frac{(\text{奇数})①}{(\text{奇数})②} \times B \times \frac{(\text{奇数})③}{(\text{奇数})④}$$ となる。よって、

$K = (4b+1)\times(4b-1)\times\cdots\times 1 \times (2b-1)\times(2b-3)\times\cdots\times 1$　②×④

$L = (4a+1)\times(4a-1)\times\cdots\times(4a-4b+1)\times(2a-1)\times(2a-3)\times\cdots\times(2a-2b+1)$　①×③

とおくと、K, Lは奇数であり、$KA = LB$ となる。

（証明終）

2021年　東大数学　文系第4問　理系第4問　②

(3) (1)と(2)を誘導として使うため、情報を整理。

K, L は正の奇数、a, b は $a>b$ となる整数として、

(1)より　$KA = LB$ かつ $K \equiv L$ ならば $A \equiv B$

(2)より　$KA = LB$ と表せる。

(3)で示したいのは、　$A \equiv B$

⇒ $K \equiv L$ となることを証明すればよい。

(2)で最後に求めた K, L に対し、$K \equiv L$ が示せれば、(1)の結論を利用して、$A \equiv B$ が示せる。

よって、以下、$K \equiv L$ となることを示す。

(3)の仮定より $a-b$ が2で割り切れるため
$2a-2b$ は4で割り切れる。よって

$$2a-2b \equiv 0$$

$$2a \equiv 2b \quad \cdots (※)$$

$$K = \underbrace{(4b+1)\times(4b-1)\times\cdots\times 1}_{K_1} \times \underbrace{(2b-1)\times(2b-3)\times\cdots\times 1}_{K_2}$$

に対し前半を K_1、後半を K_2 とおく。つまり

$K_1 = (4b+1)\times(4b-1)\times\cdots\times 1$

$K_2 = (2b-1)\times(2b-3)\times\cdots\times 1$ とおく。

同様に

$$L = \underbrace{(4a+1)\times(4a-1)\times\cdots\times(4a-4b+1)}_{L_1} \times \underbrace{(2a-1)\times(2b-3)\times\cdots\times(2a-2b+1)}_{L_2}$$

に対し、前半を L_1、後半を L_2 とおく。つまり

$L_1 = (4a+1)\times(4a-1)\times\cdots\times(4a-4b+1)$

$L_2 = (2a-1)\times(2a-3)\times\cdots\times(2a-2b+1)$ とおく。

K_1 と L_1、K_2 と L_2 を見比べると、4で割った余りが同じになりそう。

K_1 と L_1 を比較すると、

$$\begin{cases} 4b+1 \equiv 4a+1 \\ 4b-1 \equiv 4a-1 \\ \quad\vdots \\ 1 \equiv 4a-4b+1 \end{cases}$$

mod 4 なので $4a \equiv 4b \equiv 0$ を利用する。

← 左が K_1 の因数、右が L_1 の因数。

1つずつ比較すると、全て4で割った余りが一致。

となるため

$$L_1 = (4a+1)\times(4a-1)\times(4a-3)\times\cdots\times(4a-4b+1)$$

$$\equiv (4b+1)\times(4b-1)\times(4b-3)\times\cdots\times 1$$

$$= K_1 \qquad \therefore K_1 \equiv L_1$$

同様に、K_2 と L_2 を比較すると、

$$\begin{cases} 2b-1 \equiv 2a-1 \\ 2b-3 \equiv 2a-3 \\ \quad\vdots \\ 1 \equiv 2a-2b+1 \end{cases}$$

(※)より $2a \equiv 2b$ を利用。

← 左が K_2 の因数、右が L_2 の因数。

これも、1つずつ全て合同

となるため

$$L_2 = (2a-1)\times(2a-3)\times(2a-5)\times\cdots\times(2a-2b+1)$$

$$\equiv (2b-1)\times(2b-3)\times(2b-5)\times\cdots\times 1$$

$$= K_2 \qquad \therefore K_2 \equiv L_2$$

よって　$K = K_1 \times K_2 \equiv L_1 \times L_2 = L$ となるため

$K \equiv L$

以上　証明完了

2021年 東大数学 文系第4問 理系第4問 ③

(4)

(1)〜(3) の議論から、

$\boxed{\begin{array}{l} a-b \text{ が } 2 \text{ で割り切れれば、} \\ {}_{4a+1}C_{4b+1} \equiv {}_aC_b \end{array}}$ … (※※)

が言える

$2021 = 4 \times \underset{a}{\underline{505}} + 1$

$37 = 4 \times \underset{b}{\underline{9}} + 1$ であり

$505 - 9 = 496$ が 2 で割り切れるため、

(※※) より

${}_{2021}C_{37} \equiv {}_{505}C_9$

$505 = 4 \times \underset{a}{\underline{126}} + 1$

$9 = 4 \times \underset{b}{\underline{2}} + 1$ であり

$126 - 2 = 124$ が 2 で割り切れるため

(※※) より

${}_{505}C_9 \equiv {}_{126}C_2$

$${}_{126}C_2 = \frac{126 \times 125}{2 \times 1}$$

$$= 63 \times 125$$

$$\equiv 3 \times 1$$

$63 \equiv 3$

$125 \equiv 1$

$$\equiv 3$$

よって $\underline{3}_{//}$