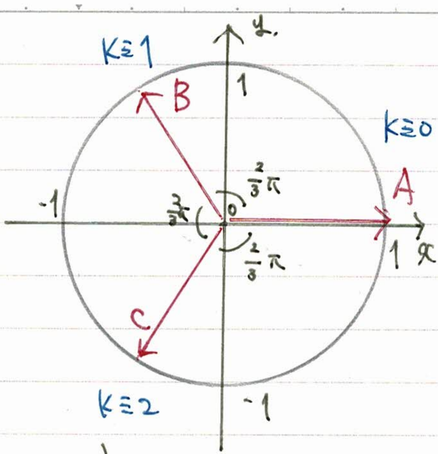
2022年　東大数学　文系第4問.

表を○
裏を× で表す。



右の図のように
ベクトルの名前を
A.B.Cとする。

A.B.C はそれぞれ、

$$e_k = \left(\cos\frac{2}{3}k\pi,\ \sin\frac{2}{3}k\pi\right)$$

に対し、 k≡0、k≡1、k≡2 (法は3)
の場合のベクトルである。

つまり、ベクトル A は $(1,0)$
ベクトル B は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
ベクトル C は $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

$$(1,0)+\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\vec{0}$$ なので、
ABCが同じ数になるとき、X_n が原点になる。

(1)

$X_5=0$ となるとき、

(i) × × × × × (全て裏)の場合
これは 1通り

(ii) ○ × ○ × ○ の順に表と裏が出る場合
これも 1通り

よって $\dfrac{1+1}{2^5} = \dfrac{1}{16}$

(2)

表が出た回数だけ移動して、最終的に原点に戻ってくるため、
A.B.C はそれぞれ $\frac{90}{3}=30$ 回ずつ。

98回のコイン投げを左から順番に並べた場合、

○…○×○…○×○…○×○…○×○…○×○…○×○…○×○…○×○…○
A_1　B_1　C_1　A_2　B_2　C_2　A_3　B_3　C_3

このように、表が連続する場所の間に、裏が8回登場する。
表が連続する回数を、上のように、A_1 ～ C_3 回とする。

すると $A_1\ A_2\ A_3$ ではベクトル A の方向に
$B_1\ B_2\ B_3$: B に
$C_1\ C_2\ C_3$: C に 対応する。

よって $A_1\ A_2\ A_3$ で登場する表の数を $a_1\ a_2\ a_3$ とすると、
$a_1+a_2+a_3=30$ かつ $a_1\geqq0$　$a_2\geqq0$　$a_3\geqq0$
を満たす整数 $a_1\ a_2\ a_3$ の解の個数を考えれば良い。

これは、重複組合せを利用し、${}_{32}C_2$ 通り。

$B_1B_2B_3$、$C_1C_2C_3$ も同様に ${}_{32}C_2$ 通りずつ

全事象は 2^{98} 通りあるので、 $\dfrac{({}_{32}C_2)^3}{2^{98}} = \dfrac{31^3}{2^{86}}$

補 重複組合せ。

Q. $x+y+z=n$　$x\geqq0$, $y\geqq0$, $z\geqq0$
を満たす $x.y.z$ の整数解は

n個の○と2本の/(仕切り)の並び替え
の場合分けに対応させて、

$\underbrace{○○○\cdots○}_{n個}//$　　${}_{n+2}C_2$ 通り