2022年　東大数学　文系第3問 ①

(1). Point.

余りは周期性を示す。
過去問でも、類題が多いです。

⇓

$a_1\ a_2\ a_3\ \cdots$ と調べる

以下、3を法とした合同式とする。

$a_1 = 4 \equiv 1$
$a_2 = a_1^2 + 1\times 3 \equiv 1^2 + 0 \equiv 1$
$a_3 = a_2^2 + 2\times 4 \equiv 1^2 + 2\times 1 \equiv 3 \equiv 0$
$a_4 = a_3^2 + 3\times 5 \equiv 0^2 + 0 \equiv 0$
$a_5 = a_4^2 + 4\times 6 \equiv 0^2 + 0 \equiv 0$
$a_6 = a_5^2 + 5\times 7 \equiv 0^2 + 2\times 1 \equiv 2$
$a_7 = a_6^2 + 6\times 8 \equiv 2^2 + 0 \equiv 4 \equiv 1$
$a_8 = a_7^2 + 7\times 9 \equiv 1^2 + 0 \equiv 1$
$a_9 = a_8^2 + 8\times 10 \equiv 1^2 + 2\times 1 \equiv 3 \equiv 0$
$a_{10} = a_9^2 + 9\times 11 \equiv 0^2 + 0 \equiv 0$
$a_{11} = a_{10}^2 + 10\times 12 \equiv 0^2 + 0 \equiv 0$
$a_{12} = a_{11}^2 + 11\times 13 \equiv 0^2 + 2\times 1 \equiv 2$

周期6が見えはじめた

周期6と予想

このくらい計算して、多分周期6になっていると予想

以上は、答案に必ずしも書かなくても良い部分。
書いたとしても、減点対象ではないと思われる。

以下、答案例　(引き続き、合同式の法は3)

kを自然数として、

$$(*)\begin{cases} a_{6k-5} \equiv 1 \\ a_{6k-4} \equiv 1 \\ a_{6k-3} \equiv 0 \\ a_{6k-2} \equiv 0 \\ a_{6k-1} \equiv 0 \\ a_{6k} \equiv 2 \end{cases}$$

となることを、数学的帰納法で証明する。

$a_1 \sim a_6$ に対して 3で割った余りが、
1, 1, 0, 0, 0, 2 となることは、左で示している。

この部分を答案に書けばよい。

(*)を仮定して、

$a_{6k+1} = a_{6k}^2 + 6k(6k+2) \equiv 2^2 + 0 \equiv 4 \equiv 1$
$a_{6k+2} = a_{6k+1}^2 + (6k+1)(6k+3) \equiv 1^2 + 0 \equiv 1$
$a_{6k+3} = a_{6k+2}^2 + (6k+2)(6k+4) \equiv 1^2 + 2\times 1 \equiv 3 \equiv 0$
$a_{6k+4} = a_{6k+3}^2 + (6k+3)(6k+5) \equiv 0^2 + 0 \equiv 0$
$a_{6k+5} = a_{6k+4}^2 + (6k+4)(6k+6) \equiv 0^2 + 0 \equiv 0$
$a_{6k+6} = a_{6k+5}^2 + (6k+5)(6k+7) \equiv 0^2 + 2\times 1 \equiv 2$

となるため、証明された。

$$a_{2022} = a_{6\times 337} \equiv 2_{/\!/}$$

補足.

今回は、$a_{6k-5} \sim a_{6k}$ の6種類全ての余りを示したが、$a_{6k} \equiv 2$ だけ示せば(1)は解けます。
(2)でいくつか別解を紹介するため、あえて、情報量の多いこの解法を載せています。

2022年　東大数学　文系第3問②

(2) 与えられた漸化式に, $n=2022,2023$ を代入して

$$\begin{cases} a_{2023} = a_{2022}^2 + 2022\times2024 \quad \cdots ① \\ a_{2024} = a_{2023}^2 + 2023\times2025 \quad \cdots ② \end{cases}$$

このあと, 丁寧に説明します

求める最大公約数を d

a_{2022} と a_{2023} の最大公約数を d_1

a_{2023} と a_{2024} の 〃 d_2 とすると,

$a_{2022} = d_1k_1$　$a_{2023} = d_1l_1$

$a_{2023} = d_2k_2$　$a_{2024} = d_2l_2$

とおける.

(但し, $k_1\ l_1\ k_2\ l_2$ は整数

k_1 と l_1　k_2 と l_2 は

互いに素

①に代入し,

$$d_1l_1 = d_1k_1^2 + 2022\times2024$$

$$d_1(l_1-k_1^2) = 2022\times2024$$

素因数分解

$$= 2\times3\times337 \times 2^3\times11\times23$$

$$= 2^4\times3\times11\times23\times337$$

よって, d_1 は $2^4\times3\times11\times23\times337$ の約数.

②に代入し,

$$d_2l_2 = d_2k_2^2 + 2023\times2025$$

$$d_2(l_2-k_2^2) = 2023\times2025$$

素因数分解

$$= 7\times17^2\times3^4\times5^2$$

$$= 3^4\times5^2\times7\times17^2$$

よって d_2 は $3^4\times5^2\times7\times17^2$ の約数.

$2^4\times3\times11\times23\times337$ と

$3^4\times5^2\times7\times17^2$ を比べて, (共通しているものを探すと.)

両者の最大公約数は3である。

よって d の最大公約数は1か3である。

(1) より $a_{2022}\equiv2$ なので, a_{2022} は3の倍数でないため, $d=1$ である。

別解

(①と②まで同じ式.)

a_{2022} と a_{2023} と a_{2024} の3つが素数 p の倍数だと仮定する。($2\leqq p$)　pの候補は2以上.

① $\Leftrightarrow$ $a_{2023} - a_{2022}^2 = 2022\times2024$

② $\Leftrightarrow$ $a_{2024} - a_{2023}^2 = 2023\times2025$

4つとも pの倍数.

よって, 2022×2024 と 2023×2025 は pの倍数であるから,

2022 と 2024, 2023と2025 の片方, または両方が pの倍数である。

2022, 2023, 2024, 2025 は連続する4つの整数なので,

4の倍数が2つ以上含まれることはないから,

$p\leqq3$　pの候補は 2 か 3.

(1) から $a_{2022}\equiv2 \pmod 3$ なので $p\neq3$　pの候補は2のみ.

2023×2025 は (奇数)×(奇数)=(奇数) であるので, $p\neq2$.　pの候補はナシ.

以上から,

a_{2022} と a_{2023} と a_{2024} の3つとも pの倍数となるような素数 p はない。

すなわち, a_{2022} と a_{2023} と a_{2024} の最大公約数は1