2022年　東大数学　文系 第2問 ①

(1) $f(x)=x^3-x$ とおく

$f'(x)=3x^2-1$ なので、点Pにおける接線の傾きは $3\alpha^2-1$

$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha^2-1=0 \iff \alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき、} \\ \text{接線は}x\text{軸に平行であり、} \\ \ell\text{は}y\text{軸に平行となる。} \\ \text{このとき、明らかに、}C\text{と}\ell\text{の共有点は点P1つ} \\ \text{である。よって } \alpha\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

$\alpha\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ を示す部分

ℓの傾きは $-\dfrac{1}{3\alpha^2-1}$ なので、ℓの方程式は

$$\ell : y-(\alpha^3-\alpha)=-\frac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)$$

$C : y=x^3-x$ と連立させて、

$$x^3-x-(\alpha^3-\alpha)=-\frac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)$$

$$x^3-\alpha^3-(x-\alpha)+\frac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)=0$$

$$\underbrace{(x-\alpha)}_{\text{点P}}\underbrace{\left(x^2+\alpha x+\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)}_{\text{点P以外の他2点 } g(x) \text{ とおく。}}=0$$

よって、求める条件は、

$$g(x)=x^2+\alpha x+\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}=0$$

が、α以外の異なる2つの実数解を持つこと。

よって、　忘れないように。

$\left\{\begin{array}{l} \text{(i) } g(\alpha)\neq 0 \\ \text{(ii) } D>0 \end{array}\right.$ かつ　（但し、Dは $g(x)=0$ の判別式）

を求める。

(i) $g(\alpha)=\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}$

$$=\frac{(3\alpha^2-1)^2+1}{3\alpha^2-1}\neq 0 \quad (\because (\text{分子})>0)$$

よって $g(\alpha)\neq 0$ を満たす。

(ii) $D=\alpha^2-4\times1\times\left(\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}\right)$

$$=-\frac{9\alpha^4-15\alpha^2+8}{3\alpha^2-1}$$

$$=-\frac{9\left(\alpha^2-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{7}{4}}{3\alpha^2-1}$$

←(分子)>0 となった。

よって $D>0$ を解くと、$3\alpha^2-1<0$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(i)かつ(ii)より、$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ //

(2). βとγは、$g(x)=0$ の2解である。

（αは $g(x)=0$ の解ではない）

解と係数の関係から、

$$\left\{\begin{array}{l} \beta+\gamma=-\alpha \\ \beta\gamma=\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1} \end{array}\right.$$

$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1$

$=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1$

$=(-\alpha)^2-\left(\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}\right)-1$

$\beta+\gamma$ と $\beta\gamma$ を代入。

$=\dfrac{-1}{3\alpha^2-1}\neq 0$

Date

2022年　東大数学　文系第2問 ②

(3)

(2)より $\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1=\dfrac{-1}{3\alpha^2-1}$ なので、

$$\frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}=-(3\alpha^2-1)$$

よって、

$$u=4\alpha^3+\frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}$$

$$=4\alpha^3-(3\alpha^2-1)$$

$$=4\alpha^3-3\alpha^2+1$$

これを、$-\frac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}$ で、値域を調べる

$$u'=12\alpha^2-6\alpha$$
$$=6\alpha(2\alpha-1)$$

α	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$		0		$\frac{1}{2}$		$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

増減表より、

$$-\frac{4\sqrt{3}}{9}<u\leqq 1$$