2022年　東大数学　文系第1問 ①

(1)

$\boxed{\text{まずは、bをaで表し、bの範囲を求める。}}$

必ずしも必要ではない

解法1: 傾きをmとおき、放物線と連立.

原点を通る直線の傾きをmとすると、$y = mx$,
放物線Cと接するので、連立し、

$x^2+ax+b = mx \iff x^2+(a-m)x+b=0$ …(*)

この2次方程式が重解を持つため、

(判別式) $= (a-m)^2-4b=0$

$m^2-2am+a^2-4b=0$ — (**)

ここで、l_1, l_2 が存在するため、(**)がmの異なる実数解をもつから、

(判別式)/4 $= (-a)^2-(a^2-4b)>0$

∴ $b>0$

(**)のmの2解を m_1, m_2 とすると、m_1, m_2 は l_1, l_2 の傾きである。
解と係数の関係から、

$m_1+m_2=2a$ ← 使わないけど、一応たてた
$m_1m_2=a^2-4b$ ← 使う

l_1 と l_2 は直交するので、$m_1m_2=-1$

よって $a^2-4b=-1$　　$b=\frac{a^2+1}{4}$

解法2: $x=t$ での接線が原点を通る

$y=x^2+ax+b$ に対し、$y'=2x+a$
放物線上の (t, t^2+at+b) での接線は
$y-(t^2+at+b)=(2t+a)(x-t)$

これが原点を通るので、
$0-(t^2+at+b)=(2t+a)(0-t)$

∴ $t^2=b$

ここで、tの異なる2実数解があれば、
l_1, l_2 が存在するため、$t^2=b>0$

tの解を求めて、$t=\pm\sqrt{b}$

$t=-\sqrt{b}$ の場合、l_1 に対応し、傾きは $a-2\sqrt{b}$
$t=\sqrt{b}$ 〃 l_2 〃 〃 $a+2\sqrt{b}$

直交するので、$(a-2\sqrt{b})(a+2\sqrt{b})=-1$

∴ $b=\frac{a^2+1}{4}$

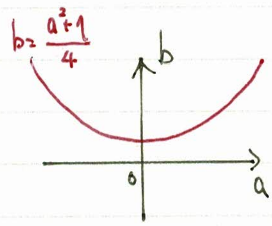
$\boxed{\text{次に、aが全ての実数をとることを示す。}}$

解法a

$b=\frac{a^2+1}{4}$ に対し、全ての実数aで $b>0$ を満たすため、aは全ての実数をとりうる。

解法b

$b=\frac{a^2+1}{4}$ のグラフは右のとおり。



グラフより、全ての実数aで、$b>0$ を満たす。

解法c

(**)が異なる2つの実数解を持てばよく、
$b=\frac{a^2+1}{4}$ を代入すると

(判別式)/4 $= (-a)^2-(a^2-4b)$
$= a^2+1>0$

これは全ての実数aで成立する。

※ 解法aとあまり変わらない。
(*)まで遡っても可能ということ。

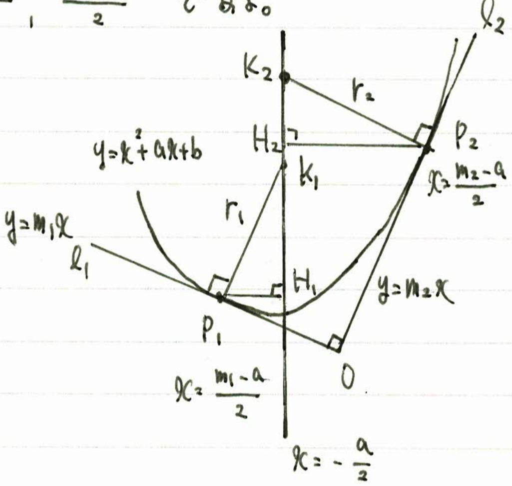
2022年　東大数学　文系第1問 ②

(2)

解法3：解法1の続きから。

(*) ⇔ $\left(x+\frac{a-m}{2}\right)^2=0$ 　（∵ (1)）

なので C と l_1 l_2 の交点 P_1 P_2 の x座標は $\frac{m_1-a}{2}$, $\frac{m_2-a}{2}$ である。



解法3-1. 相似の利用

$\triangle P_1K_1H_1 \sim \triangle K_2P_2H_2$ から。

$P_1K_1 : K_1H_1 : H_1P_1 = K_2P_2 : P_2H_2 : H_2K_2$ ―①

線分 $P_1K_1 \parallel l_2$ なので $P_1H_1 : H_1K_1 = 1 : m_2$

∴ $H_1K_1 = m_2 P_1H_1$ ―②

仮定より $P_1K_1 : P_2K_2 = 1:2$

よって $\triangle P_1K_1H_1$ と $\triangle K_2P_2H_2$ の相似比は 1:2 ―③

$$\begin{cases} P_1H_1 = -\frac{a}{2} - \frac{m_1-a}{2} = -\frac{m_1}{2} \\ P_2H_2 = \frac{m_2-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{m_2}{2} \end{cases} \quad ―④$$

①③から $K_1H_1 : P_2H_2 = 1:2$

∴ $P_2H_2 = 2K_1H_1$ ↓②

$P_2H_2 = 2m_2P_1H_1$ ↓④

$\frac{m_2}{2} = 2m_2\left(-\frac{m_1}{2}\right)$

∴ $m_1 = -\frac{1}{2}$

$(m_1m_2=-1$ から $m_2 = 2)$ 　必ずしも必要ではない

(**) に代入して $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2a\left(-\frac{1}{2}\right) + a^2 - 4\cdot\frac{a^2+1}{4} = 0$

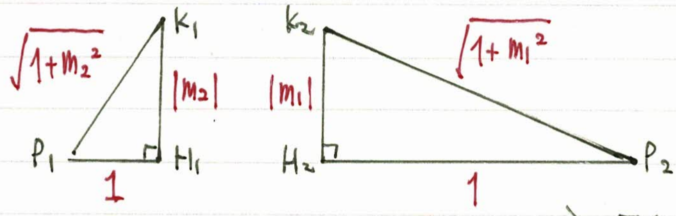
m_1を m_2でもOK.

∴ $a = \frac{3}{4}$

解法3-2. 傾きの利用.

直線 $P_1K_1 \parallel l_2$, 直線 $P_2K_2 \parallel l_1$ から。

$\triangle P_1H_1K_1$ と $\triangle P_2H_2K_2$ の3辺の比は下のよう。



図A.

$$\begin{cases} P_1H_1 = -\frac{a}{2} - \frac{m_1-a}{2} = -\frac{m_1}{2} \\ P_2H_2 = \frac{m_2-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{m_2}{2} \end{cases}$$ から。

$$\begin{cases} P_1K_1 = \sqrt{1+m_2^2} \times \left(-\frac{m_1}{2}\right) \\ P_2K_2 = \sqrt{1+m_1^2} \times \frac{m_2}{2} \end{cases}$$

$P_1K_1 : P_2K_2 = 1:2$ なので

$\sqrt{1+m_2^2}\left(-\frac{m_1}{2}\right) \times 2 = \sqrt{1+m_1^2} \times \frac{m_2}{2}$ 　あとは解くだけ

↓2乗

$(1+m_2^2)\cdot\cancel{\frac{1}{4}}m_1^2 \times \cancel{4} = (1+m_1^2) \times \frac{1}{4}m_2^2$

↓ $m_1m_2=-1$

$(1+m_2^2) \times \frac{1}{m_2^2} = \left(1+\frac{1}{m_2^2}\right) \times \frac{1}{4}m_2^2$

$m_2^2 = 4$

$m_1m_2=-1$ と $m_1<m_2$ から $m_2>0$ なので

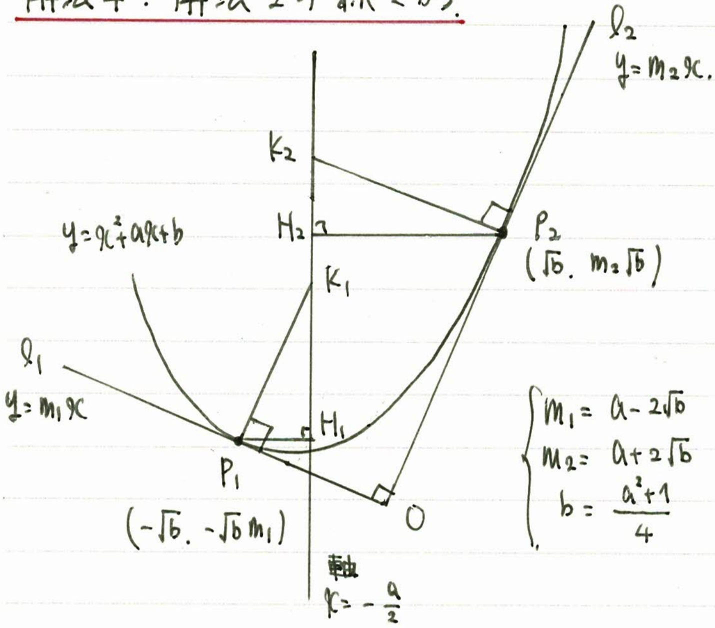
$m_2 = 2$, 　$(m_1 = -\frac{1}{2}$ もわかる$)$

(**) に代入して $4 - 2a\cdot(-2) + a^2 - 4\cdot\frac{a^2+1}{4} = 0$

$a = \frac{3}{4}$

2022年　東大数学　文系第1問 ③

解法4：解法2の続きから。



$$\begin{cases} m_1 = a-2\sqrt{6} \\ m_2 = a+2\sqrt{6} \\ b = \dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$$

解法4-1：相似の利用。

(解法3-1 の ①〜③ を利用する)

$$\begin{cases} P_1H_1 = -\frac{a}{2}-(-\sqrt{6}) = \sqrt{6}-\frac{a}{2} \\ P_2H_2 = \sqrt{6}-\left(-\frac{a}{2}\right) = \sqrt{6}+\frac{a}{2} \quad \text{— ⑤} \end{cases}$$

①③から。　$K_1H_1 : P_2H_2 = 1:2$

$$P_2H_2 = 2K_1H_1$$

$\downarrow$ ②

$$P_2H_2 = 2m_2\,P_1H_1$$

$\downarrow$ ⑤

$$\sqrt{6}+\frac{a}{2} = 2m_2\left(\sqrt{6}-\frac{a}{2}\right)$$

$\downarrow$ $m_2 = a+2\sqrt{6}$

$$\sqrt{6}+\frac{a}{2} = 2(a+2\sqrt{6})\left(\sqrt{6}-\frac{a}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{(a+2\sqrt{6})} = \cancel{(a+2\sqrt{6})}(2\sqrt{6}-a)$$

$\downarrow$ $b=\dfrac{a^2+1}{4}$

$$\frac{1}{2} = 2\cdot\sqrt{\frac{a^2+1}{4}} - a$$

$$a+\frac{1}{2} = \sqrt{a^2+1}$$

$\downarrow$ 2乗。

$$a^2+a+\frac{1}{4} = a^2+1$$

$$\underline{a = \frac{3}{4}}_{//}$$

解法4-2：傾きの利用

(解法3-2の図Aと、解法4-1の⑤を利用する)

図Aの相似比と⑤から。

$$\begin{cases} P_1K_1 = \sqrt{1+m_2^2} \times \left(\sqrt{6}-\frac{a}{2}\right) \\ P_2K_2 = \sqrt{1+m_1^2} \times \left(\sqrt{6}+\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

$P_1K_1 : P_2K_2 = 1:2$ なので

$$\sqrt{1+m_2^2}\left(\sqrt{6}-\frac{a}{2}\right)\times 2 = \sqrt{1+m_1^2}\left(\sqrt{6}+\frac{a}{2}\right)$$

$$-\sqrt{1+m_2^2}\,\underbrace{(a-2\sqrt{6})}_{m_1} = \frac{1}{2}\sqrt{1+m_1^2}\,\underbrace{(a+2\sqrt{6})}_{m_2}$$

$$-m_1\sqrt{1+m_2^2} = \frac{1}{2}m_2\sqrt{1+m_1^2}$$

$\downarrow$ 2乗

$$m_1^2(1+m_2^2) = \frac{1}{4}m_2^2(1+m_1^2)$$

しばらく、解法3-2の後半と同じ計算

$m_1 = -\frac{1}{2}$　$m_2 = 2$ なので

$$\begin{cases} a-2\sqrt{6} = -\frac{1}{2} \\ a+2\sqrt{6} = 2 \end{cases}$$

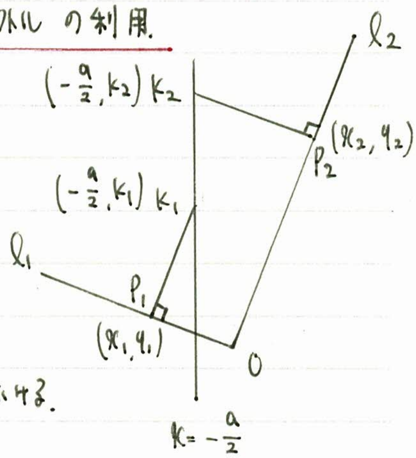
辺々足して　$2a = \frac{3}{2}$

$$\underline{a = \frac{3}{4}}_{//}$$

解法5：法線ベクトルの利用。

l_1の傾きはm_1なので方向ベクトルは$(1,\ m_1)$

よって、P_1K_1の方向ベクトルは$(m_1,\ -1)$



よって、$\overrightarrow{P_1K_1} = s(m_1,\ -1)$ とおける。

$$\left(-\frac{a}{2}-x_1,\ k_1-y_1\right) = s(m_1,\ -1)$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{a}{2}-x_1 = sm_1 \quad \text{— ⑥} \\ k_1-y_1 = -s \quad \text{— ⑦} \end{cases}$$

2022年　東大数学　文系第1問 ④

解法 5-1　解法1の続き。

$x_1 = \frac{m_1 - a}{2}$　　$y_1 = m_1 x_1 = m_1 \frac{m_1 - a}{2}$ である。

⑥より

$$-\frac{a}{2} - \frac{m_1 - a}{2} = s m_1$$

$$-\frac{m_1}{2} = s m_1 \qquad \therefore s = -\frac{1}{2}$$

⑦に代入し、

$$k_1 - m_1 \cdot \frac{m_1 - a}{2} = -\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 (m_1 - a) + \frac{1}{2}$$

$$r_1 = P_1K_1 = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - x_1\right)^2 + (k_1 - y_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{m_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + m_1^2}$$

同様に、

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + m_2^2}$$

（l_2 の方向ベクトルは $(1, m_2)$
P_2K_2 の 〃 : $(m_2, -1)$
$\overrightarrow{P_2K_2} = s'(m_2, -1)$ とすると、$s' = -\frac{1}{2}$
$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (m_2 - a) + \frac{1}{2}$）

$r_1 : r_2 = 1 : 2$ より

$$2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1 + m_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + m_2^2}$$

↓ $m_1 m_2 = -1$　2乗

$$4 \cdot \left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right) = 1 + m_2^2$$

$$m_2^2 = 4$$

$m_1 m_2 = -1$、$m_1 < m_2$ から $m_2 > 0$ のため

$$m_2 = 2.$$

（以下略）

解法 5-2　解法2の続き。

$x_1 = -\sqrt{b}$　　$y_1 = m_1 x_1 = -m_1\sqrt{b}$ である。

⑥より

$$-\frac{a}{2} - (-\sqrt{b}) = s m_1$$

↓ $m_1 = a - 2\sqrt{b}$

$$-\frac{1}{2}(a - 2\sqrt{b}) = s(a - 2\sqrt{b})$$

$$\therefore s = -\frac{1}{2}$$

⑦に代入し、$k_1 - (-m_1\sqrt{b}) = -\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$k_1 = -m_1\sqrt{b} + \frac{1}{2}$$

$$r_1 = P_1K_1 = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - x_1\right)^2 + (k_1 - y_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

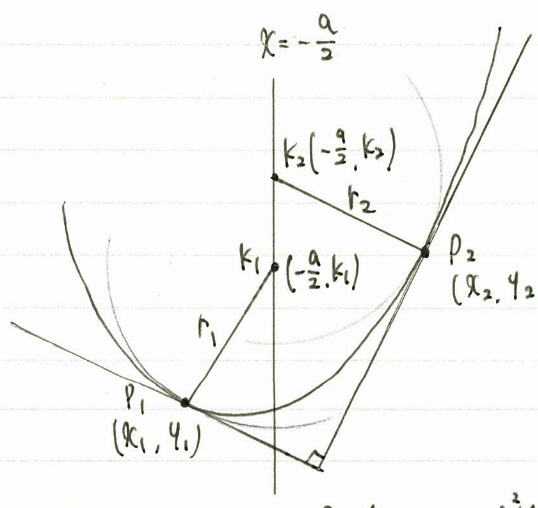
↓ $m_1 = a - 2\sqrt{b}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + m_1^2}$$

同様に、$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + m_2^2}$

以下、左と同様。

解法 6.　円と放物線が接する条件を利用。



$C: y = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$　（$b = \frac{a^2+1}{4}$ を使った）

円の方程式を

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - k)^2 = r^2$$ とおく。

2022年　東大数学　文系第1問⑤

$C: y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$　と

円: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-k)^2=r^2$　を連立し　(x消去)

$$y-\frac{1}{4}+(y-k)^2=r^2$$

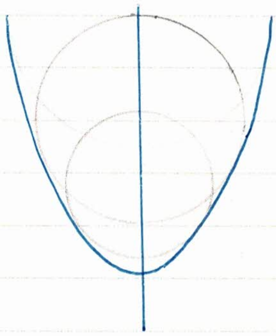
$$y^2+(1-2k)y+k^2-r^2-\frac{1}{4}=0$$

円と放物線が接するので、
この2次方程式が重解を持つ。

$$(\text{判別式})=(1-2k)^2-4\left(k^2-r^2-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\therefore k=r^2+\frac{1}{2}$$

$y^2+(1-2k)y+k^2-r^2-\frac{1}{4}=0$　かつ
$k=r^2+\frac{1}{2}$　を満たすと、
放物線Cと円が接する。
このような (y, k, r) の解の組は、
無数にある。



このように、
円と放物線が
接する図は
たくさん書ける。

ここから、
半径の比が
1:2になっている
ものを探す。

$k=r^2+\frac{1}{2}$ を、代入し

$$y^2-2r^2y+\left(r^2+\frac{1}{2}\right)^2-r^2-\frac{1}{4}=0$$

$$y^2-2r^2y+r^4=0$$

$$(y-r^2)^2=0$$

$$y=r^2$$

よって、P_1 の座標は (x_1, y_1) とすると、
$y_1=m_1x_1$ (l_1上) かつ $y_1=r_1^2$ となり

同様に、$y_2=m_2x_2$ かつ $y_2=r_2^2$ であり、
仮定から、$2r_1=r_2$ である。

よって、$4r_1^2=r_2^2$ に、$y_1=r_1^2$ $y_2=r_2^2$ を代入し、

$$4y_1=y_2$$

解法6-1. 解法1の続き。

$$x_1=\frac{m_1-a}{2}\qquad y_1=m_1x_1=m_1\cdot\frac{m_1-a}{2}$$

$$x_2=\frac{m_2-a}{2}\qquad y_2=m_2x_2=m_2\cdot\frac{m_2-a}{2}$$ なので、

$4y_1=y_2$ に代入し、

$$4m_1\cdot\frac{m_1-a}{2}=m_2\cdot\frac{m_2-a}{2}$$

$m_1m_2=-1$
(※※)の解がm_2
なので、
$m_2^2-2am_2-1=0$
$\Leftrightarrow m_2^2=2am_2+1$
を連立して解くと、

$$\begin{cases} m_1=-\frac{1}{2} \\ m_2=2. \\ a=\frac{3}{4} \end{cases}$$

解法6-2. 解法2の続き。

$x_1=-\sqrt{b}$　$y_1=m_1x_1=(a-2\sqrt{b})\cdot(-\sqrt{b})$

$x_2=\sqrt{b}$　$y_2=m_2x_2=(a+2\sqrt{b})\cdot\sqrt{b}$

なので、

$4y_1=y_2$ に代入し、

$$4\cdot(a-2\sqrt{b})(-\sqrt{b})=\sqrt{b}(a+2\sqrt{b})$$

$$5a=6\sqrt{b}$$

$$5a=6\cdot\sqrt{\frac{a^2+1}{4}}$$

↓ 2乗

$$25a^2=9(a^2+1)$$

$$a^2=\frac{9}{16}$$

$a>0$ より　$a=\frac{3}{4}$