2011年　東大数学　文系第1問

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　不明量 4つ。

$f(1)=1$ ‥‥ ①

$f(-1)=-1$ ‥‥ ②

$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$ ‥‥ ③

等式が3本

補

不明量4つに対し、等式が3本。なので、$4-3=1$ より、事実上、不明量1つのカウント。

a, b, c, d のうちどれを残すかは、核心。(問題の設定や、式の計算結果を見て、柔軟に判断する。)

$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f'(x)\}^2dx$ の min

xで積分するので、xは残らない。

残した1文字で整理して、最小値を計算する。

(2変数関数にはならない)

① より　$a+b+c+d=1$ ‥‥ ①′

② より　$-a+b-c+d=-1$ ‥‥ ②′

③ より　$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$

$2\int_{0}^{1}(bx^2+d)\,dx=1$

$2\left[\frac{1}{3}bx^3+dx\right]_0^1=1$

$\frac{2}{3}b+2d=1$ ‥‥ ③′

a.b.c.d のどれを残すか

$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f'(x)\}^2dx$

$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(6ax+2b)^2dx$

$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(36a^2x^2+24abx+4b^2)\,dx$

$=\left[12a^2x^3+12abx^2+4b^2x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$

$=12a^2\left(\frac{1}{8}+1\right)+12ab\left(\frac{1}{4}-1\right)+4b^2\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$=\frac{27}{2}a^2+9ab+6b^2$ ← aとbの関数。

①′〜③′から aかbを残すと、楽(絶対ではない)

①′+②′ より　$2b+2d=0$　∴ $d=-b$

③′に代入して、$\frac{2}{3}b-2b=1$　∴ $b=-\frac{3}{4}$

bがわかってしまったので、結局、aを残す。

Iに代入して、

$I=\frac{27}{2}a^2+9a\times\left(-\frac{3}{4}\right)+6\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

$=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}$ ◀ aの2次関数になった

⇒ 平方完成して、グラフ

$=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}$

よって、Iは、$a=-\frac{1}{4}$ のとき、最小値 $\frac{81}{32}$ をとる。//

①′②′③′に $a=-\frac{1}{4}$　$b=-\frac{3}{4}$ を代入すると、

$c=\frac{5}{4}$、$d=\frac{3}{4}$ が求められるので、

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ //