Date

2012年 東大数学 文系第4問 ①

(1) 放物線の外部の点から2本接線を引く

⇒ 放物線上の点をパラメータでおく。

$y=f(x)=x^2+1$ として、$(p,\ p^2+1)$ での接線を求めると

$$y-f(p)=f'(p)(x-p)$$

$$\iff y=2px-p^2+1$$

これが (s,t) を通るので、

$$t=2ps-p^2+1$$

$$\iff p^2-2sp+t-1=0$$

$$\iff p=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$$

s, tを残して pを消去したい

↓

解の公式

（根号の中は、$t<0$ より常に正であるから、pの解は常に2つある）

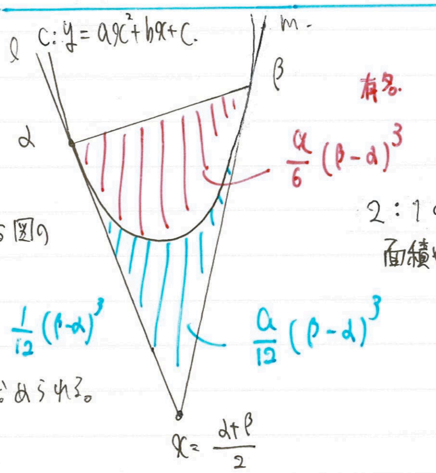
よって接線は、$y=2px-p^2+1$ に $p=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$ を代入して、

$$y=2\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)(x-s)+t \quad //$$

代入して整理すれば求められるが、直線の方程式を

$y=2p(x-s)+t$ と変形しておくと楽

(2) $\frac{1}{12}$公式



有名。

$\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

2:1の面積比

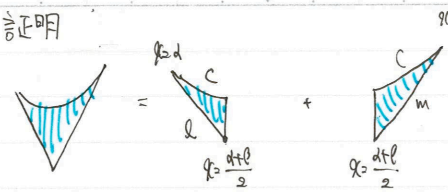
一般に、右図の面積は、

$\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$　$\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$

のように求められる。

$\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$

証明



$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(C-l)\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(C-m)\,dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}a(x-\alpha)^2\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}a(x-\beta)^2\,dx$$

Cとlは$x=\alpha$で接する。　Cとmは$x=\beta$で接する。

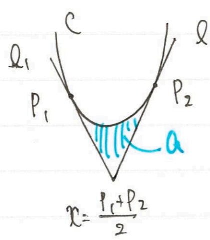
$$=\left[\frac{a}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{a}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3$$

$$=\frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3$$

$$=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{24}+\frac{a(\beta-\alpha)^3}{24}=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

今回の問題では、



$l_1: y=2\left(s-\sqrt{s^2-t+1}\right)(x-s)+t$

$l_2: y=2\left(s+\sqrt{s^2-t+1}\right)(x-s)+t$

p_1, p_2は $p^2-2sp+t-1=0$ の2解なので、

$$\begin{cases} p_1+p_2=2s \\ p_1p_2=t-1 \end{cases}$$

なので、

$$a=\frac{1}{12}(p_2-p_1)^3 \quad \text{となる。}$$

$$(p_2-p_1)^2=(p_1+p_2)^2-4p_1p_2$$

$$=(2s)^2-4(t-1)$$

$$=4(s^2-t+1) \quad \text{より}$$

2012年　東大数学　文系第4問②

$P_2 - P_1 = 2(s^2-t+1)^{\frac{1}{2}}$

よって　$a = \frac{1}{12}\cdot\left\{2(s^2-t+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^3$

$= \frac{8}{12}\cdot(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}$

$a = \frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{3}{2}a = (s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}$　$\xrightarrow{\frac{2}{3}\text{乗する}}$　$\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} = s^2-t+1$

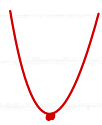
この式を満たす(s, t)を求めればよい。
(但し、$t<0$、$a>0$)

$s^2-t+1 = \left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$

$t = s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$

縦軸 t
横軸 sとすると
頂点が
$\left(0, 1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\right)$
の放物線

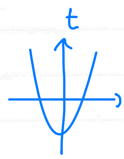
$t = s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$
のグラフ



$\left(0, 1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\right)$

$t<0$ に解を持つためには

$s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$ の最小値 <0 が必要。



$t<0$ の領域に
グラフが存在すればよい

$s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$　$(s=0)$

なので

$1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} < 0$

$1 < \left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$

$1 < \frac{3}{2}a$

$\frac{2}{3} < a$

よって　$0 < a \leqq \frac{2}{3}$ のとき　(s, t) は存在しない

$\frac{2}{3} < a$ のとき　(s, t) は

$t = s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$ 上の $t<0$

の部分の点の全体。