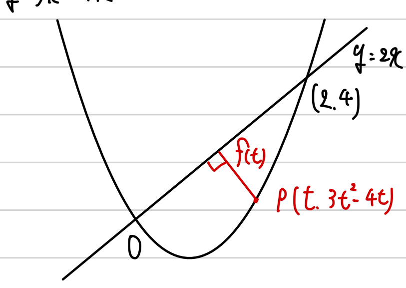
2023年　東大数学　文系第2問

(1)

$P(t, 3t^2-4t)$ と $2x-y=0$ との距離が $f(t)$ なので
点と直線の距離の公式より

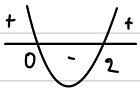


$$f(t)=\frac{|2t-(3t^2-4t)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}|-3t^2+6t|$$

$|x|=|-x|$ 絶対値の中身はマイナスがけOK

$$=\frac{3}{\sqrt5}|t(t-2)|$$

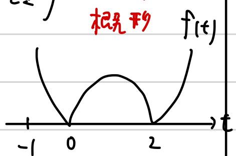


より $0<t<2$ で $t(t-2)<0$
$t<0,\ 2<t$ で $t(t-2)>0$

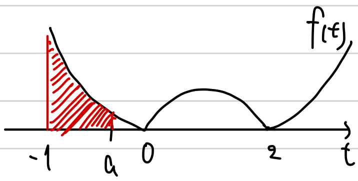
よって

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt5}t(t-2) & (t<0,\ 2<t \text{ のとき})\\ -\dfrac{3}{\sqrt5}t(t-2) & (0\leqq t\leqq 2 \text{ のとき})\end{cases}$$

f(t)の概形



(i) $-1\leqq a<0$ のとき
(右の　の面積が $g(a)$)



$$g(a)=\int_{-1}^{a}\frac{3}{\sqrt5}t(t-2)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt5}(t^3-3t^2)\right]_{-1}^{a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left\{(a^3-(-1))-3(a^2-(-1)^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}(a^3-3a^2+4)$$

(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき
(右の　の面積が $g(a)$)

$$g(a)=\int_{-1}^{0}\frac{3}{\sqrt5}t(t-2)\,dt+\int_{0}^{a}-\frac{3}{\sqrt5}t(t-2)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt5}(t^3-3t^2)\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{\sqrt5}(t^3-3t^2)\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left\{(0^3-(-1)^3)-3(0^2-(-1)^2)\right\}+\frac{1}{\sqrt5}\left\{(a^3-0^3)-3(a^2-0^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}(-a^3+3a^2+4)$$

よって

$$g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt5}(a^3-3a^2+4) & (-1\leqq a<0 \text{ のとき})\\ \dfrac{1}{\sqrt5}(-a^3+3a^2+4) & (0\leqq a\leqq 2 \text{ のとき})\end{cases}$$

//

(2) $0\leqq a\leqq 2$ のとき

$f(a)=-\dfrac{3}{\sqrt5}a(a-2)$　$g(a)=\dfrac{1}{\sqrt5}(-a^3+3a^2+4)$ なので

$h(a)=g(a)-f(a)$ とおくと

$$h(a)=\frac{1}{\sqrt5}(-a^3+3a^2+4)-\left\{-\frac{3}{\sqrt5}a(a-2)\right\}$$

$$=\cdots$$

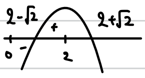
$$=\frac{1}{\sqrt5}(-a^3+6a^2-6a+4)$$

aの3次関数 ⇒ 微分

$$h'(a)=\frac{1}{\sqrt5}(-3a^2+12a-6)$$

$$=\frac{-3}{\sqrt5}(a^2-4a+2)$$

$a^2-4a+2=0$
$a=2\pm\sqrt2$



a	0		$2-\sqrt2$		2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$	$\frac{4}{\sqrt5}$	↘	$\boxed{h(2-\sqrt2)=\frac{1}{\sqrt5}(8-4\sqrt2)}$	↗	$\frac{8}{\sqrt5}$

よって
最小値は $\dfrac{1}{\sqrt5}(8-4\sqrt2)$　$(a=2-\sqrt2)$
最大値は $\dfrac{8}{\sqrt5}$　$(a=2)$ //

《$h(2-\sqrt2)=\dfrac{1}{\sqrt5}(8-4\sqrt2)$ の求め方》

方法1：わり算

$a=2-\sqrt2$ のとき　$a^2-4a+2=0$
$h(a)\div(a^2-4a+2)$ を計算して

$$\begin{array}{r} -a+2 \\ a^2-4a+2\,\overline{)\,-a^3+6a^2-6a+4} \\ -a^3+4a^2-2a \\ \hline 2a^2-4a+4 \\ 2a^2-8a+4 \\ \hline 4a \end{array}$$

$$h(a)=\frac{1}{\sqrt5}\left\{\underbrace{(a^2-4a+2)}_{0}(-a+2)+4a\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt5}a=\frac{4}{\sqrt5}(2-\sqrt2)=\frac{1}{\sqrt5}(8-4\sqrt2)$$

方法2：次数下げ

$a^2-4a+2=0 \iff a^2=4a-2$ を代入

$-a^3+6a^2-6a+4$
$=-a(4a-2)+6(4a-2)-6a+4$
$=-4a^2+2a+24a-12-6a+4$
$=-4(4a-2)+20a-8$
$=4a$ なので

$$h(a)=\frac{1}{\sqrt5}\times 4a$$

$$=\frac{4}{\sqrt5}(2-\sqrt2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}(8-4\sqrt2)$$