2023年　東大数学　文系第1問

解と係数の関係から、

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-k\end{cases}$$

αとβの対称式なので、解と係数の関係を式(代入すれば、kの式になると予想できる)

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}$$

$$=\frac{\alpha^3(1-\alpha)+\beta^3(1-\beta)}{(1-\beta)(1-\alpha)}$$

$$=\frac{(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha^4+\beta^4)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$\alpha^3+\beta^3$ と $\alpha^4+\beta^4$ を作りたい。

ここで、$\alpha^3+\beta^3$ と $\alpha^4+\beta^4$ を作ると、

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$　有名な対称式の変形

$=(-1)^2-2\cdot(-k)$

$=1+2k$

代入

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$　$\alpha^4+\beta^4$ は $\alpha^2+\beta^2$ を2乗して作るのが一般的

$=(1+2k)^2-2(-k)^2$

$=1+4k+4k^2-2k^2$

$=2k^2+4k+1$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$　有名な対称式の変形

$=(-1)^3-3\times(-1)\times(-k)$

$=-1-3k$

なので、代入して

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha^4+\beta^4)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{(-1-3k)-(2k^2+4k+1)}{1-(-1)+(-k)}$$

$$=\frac{-2k^2-7k-2}{2-k}$$

$$=\frac{2k^2+7k+2}{k-2}$$

分数式の最小値を求める ⇒ まずは、相加相乗を検討
(相加相乗が使えない時は、「$=y$」とおいて逆像法を利用)

$f(k)=\dfrac{2k^2+7k+2}{k-2}$ とおく

$(2k^2+7k+2)\div(k-2)$ を計算すると

$$\begin{array}{r|l} & 2k+11 \\ \hline k-2 & 2k^2+7k+2 \\ & 2k^2-4k \\ \hline & 11k+2 \\ & 11k-22 \\ \hline & 24\end{array}$$

$2k^2+7k+2=(k-2)(2k+11)+24$ なので

$$f(k)=\frac{(k-2)(2k+11)+24}{k-2}$$

$$=2k+11+\frac{24}{k-2}$$

$$=2(k-2)+\frac{24}{k-2}+15$$

相加相乗の形ができた

$2k^2+7k+2$
$=2k(k-2)+11k+2$
$=2k(k-2)+11(k-2)+15$
の変形を利用しても OK

$k-2>0$, $\dfrac{24}{k-2}>0$ より

相加平均と相乗平均の関係から

$$f(k)\geqq 2\sqrt{2\cancel{(k-2)}\times\frac{24}{\cancel{k-2}}}+15$$

$$=8\sqrt{3}+15$$

等号成立条件は

$2(k-2)=\dfrac{24}{k-2}$

$(k-2)^2=12$

$k=2\pm2\sqrt{3}$

$k>2$ より $k=2+\sqrt{3}$ の時。

《最小値の示し方》
$f(x)\geqq a$ かつ、$f(x)=a$ となる x が存在（等号成立条件）
⇕
$f(x)$ の最小値が a

以上より $k=2+2\sqrt{3}$ のとき、最小値 $8\sqrt{3}+15$ //