Date

2011年　東大数学　文系第3問 ①

問題の設定がわかりづらい。
まずは、どんな問題なのかを把握する。

ex① 具体的な数字を代入

たとえば、$q=2$, $p=3$ とする。

$0 \leqq a \leqq 3$ なので、 $a=0, 1, 2, 3$

$-2 \leqq b \leqq 0$ なので、 $b=-2, -1, 0$

表を作り、マスに c の値を書き込むと、

ⓑ \ ⓐ	0	1	2	3
0	0 1コ	0, 1 2コ	0, 1, 2 3コ	0, 1, 2, 3 4コ
−1	−1, 0 2コ	−1, 0, 1 3コ	−1, 0, 1, 2 4コ	−1, 0, 1, 2, 3 5コ
−2	−2, −1, 0 3コ	−2, −1, 0, 1 4コ	−2, −1, 0, 1, 2 5コ	−2, −1, 0, 1, 2, 3 6コ

よって、
- 全部で (a, b) は $4 \times 3 = 12$ 通り（マスの数）ある
- 1つの (a, b) に対し、c は $a-b+1$ 通りある。
  （例えば、$a=2$, $b=-1$ のところでは、c が 4コ）
- (p, q) パターンは、$1+2+3+4+2+3+4+5+3+4+5+6$
  $= 42$ 通りある。

オマケ

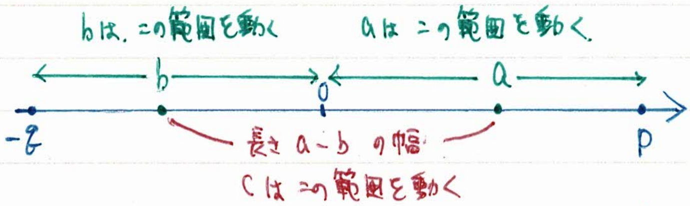
表をよく見ると、数が斜めに揃っている

b \ a	0	1	2	3
0	1	2	3	4
−1	2	3	4	5
−2	3	4	5	6

つまり $a-b$ が一定だと、対応する c の値が同じになっている
（$a-b=2$ のマスは全て c が 3通り）

ex② 数直線で考える

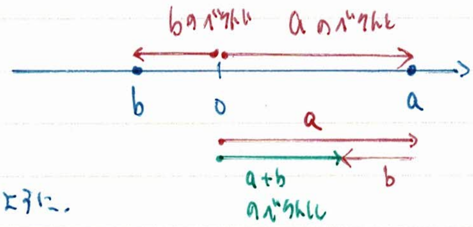
与えられた条件を、数直線で表現する。



（cは、この幅が決まれば
とりうる値の個数が決まる。
つまり、cは $a-b+1$ 通り）

$\begin{cases} 0 \leqq a \leqq p \\ -q \leqq b \leqq 0 \end{cases}$ を動きながら、$a-b$ の幅が決まり、
その幅に対応して c が $a-b+1$ 通りの値をとる。

ちなみに、
この問題では $a+b$ が一定の場合を考察するが、
$a+b$ とは、



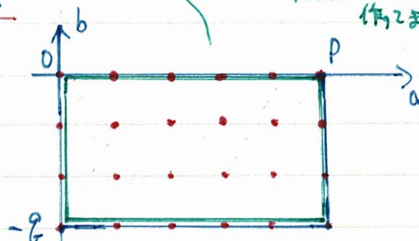
この図のように、
ベクトルのように
捉えるとイメージしやすい。

ex③ 格子点で考える

$\begin{cases} 0 \leqq a \leqq p \\ -q \leqq b \leqq 0 \\ b \leqq c \leqq a \end{cases}$

を領域で表現。
各格子点が「箱」に
なっていて、箱の中に
$a-b+1$ 個の c が入っている

実は ex① の表は
格子点をイメージして
作ってます



この領域内の
各格子点に、それぞれ
$a-b+1$ コの c が
入っている。

2011年　東大数学　文系第3問 ②

(1)

(i) $w([a,b:c]) = -q$ の場合.

$$p - q - (a+b) = -q$$
$$p = a+b$$

ここで. $p \geqq a$ より　$a+b \geqq a$　問題文の仮定.

$\therefore\ b \geqq 0$

b は　$b \leqq 0$　も満たすため　$b=0$

$b \leqq 0$ と $b \geqq 0$ を同時に満たすのは $b=0$

よって　$p = a+b = a$

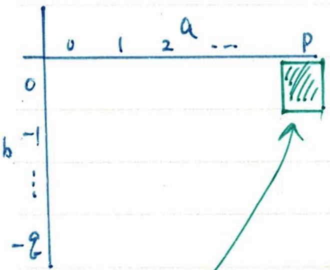
まとめると.　$a=p$.　$b=0$.　$0 \leqq c \leqq p$

対応する c は

$c = 0, 1, 2, \cdots, p$　の $p+1$ 個.

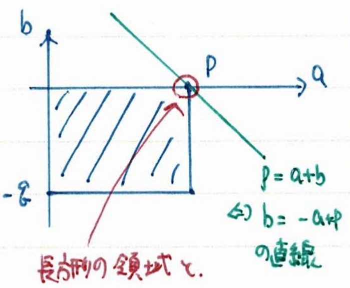
よって (p, q) パターンは $p+1$ 個である。

ex① の表で



この1ヶだけ該当.
c の値は
$c = 0, 1, 2, \cdots p$ の
$p+1$ 個.

ex③ 格子点で



長方形の領域と
$p=a+b$ の直線の共有点は
$(a, b) = (p, 0)$ の1点のみ.
この点に入っている c は
$a-b+1 = p-0+1 = p+1$ コ

ex② 数直線で

この範囲を c が動く.
$0, 1, 2, \cdots p$ の $p+1$ コ.

(ii) $w([a,b:c]) = p$ の場合.

$$p - q - (a+b) = p$$
$$a+b = -q$$

ここで.　$-q \leqq b$ より　$a+b \leqq b$

$\therefore\ a \leqq 0$

a は　$0 \leqq a$　も満たすため.　$a=0$

$a \leqq 0$ と $a \geqq 0$ を同時に満たすのは $a=0$ だけ.

よって.　$-q = a+b = b$

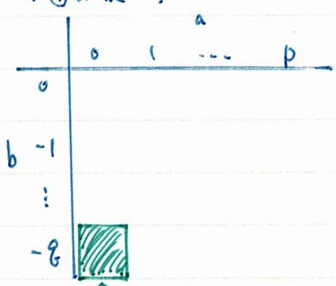
まとめると.　$a=0$.　$b=-q$　$-q \leqq c \leqq 0$

対応する c は

$-q, -q+1, -q+2, \cdots 0$　の $q+1$ 個.

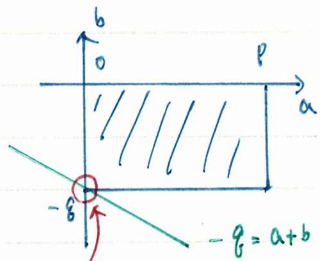
よって. (p, q) パターンは. $q+1$ 個である。

ex① の表で.



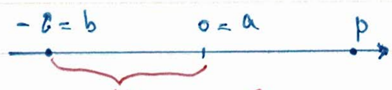
この1ヶだけ該当
c の値は
$c = -q, -q+1, \cdots 0$ の
$q+1$ 個.

ex③ 格子点で.



長方形の領域と
$-q = a+b$ の共有点は
$(a, b) = (0, -q)$ の1点のみ.
この点の c は $a-b+1$
$= 0-(-q)+1$
$= q+1$ コ.

ex② 数直線で.



この範囲を c が動く
$-q, -q+1, -q+2, \cdots 0$ の $q+1$ コ

2011年　東大数学　文系第3問 ③

(2)　$p=s$ とする。

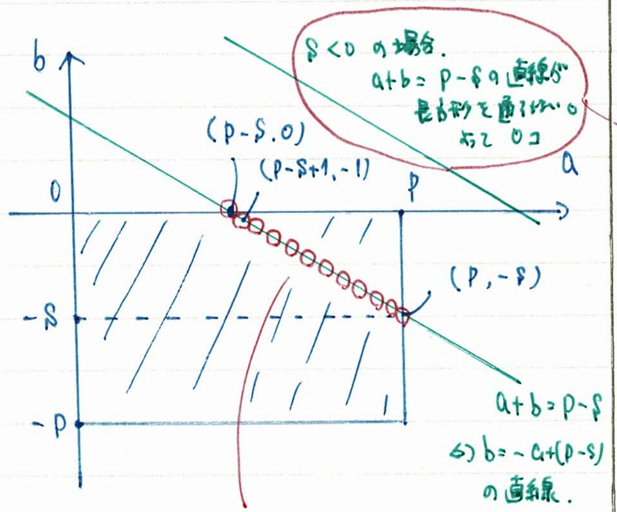
$w([a,b;c]) = -p+s$ なので

$p-p-(a+b) = -p+s$

$\therefore\ a+b = p-s$

ex③ 格子点を導入

(ex① の表でも良いが、やることはほぼ同じ)



各 格子点の「箱」に入っている c の個数を数えて合計する。

格子点の座標		$a-b+1$ コ 対応する c
$(p-s,\ 0)$	⋯	$p-s-0+1 = p-s+1$ コ
$(p-s+1,\ -1)$	⋯	$p-s+1-(-1)+1 = p-s+3$ コ
$(p-s+2,\ -2)$	⋯	$p-s+2-(-2)+1 = p-s+5$ コ
⋮		
$(p-s+k,\ -k)$	⋯	$p-s+k-(-k)+1 = p-s+2k+1$ コ
⋮		
$(p,\ -s)$	⋯	$p-(-s)+1 = p+s+1$ コ

一般項

となる。

$(p-s+k, -k)$ の時の c の個数 $p-s+2k+1$ コ に対し、$k=0,1,2,\cdots,s$ で動かした時の和をとり、

$$\sum_{k=0}^{s}(p-s+2k+1)$$

$$= \underbrace{p-s+1}_{k=0} + \sum_{k=1}^{s}(p-s+2k+1)$$

$$= p-s+1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{s}(p-s+1)}_{k\text{によらない}} + 2\cdot\sum_{k=1}^{s}k$$

$$= p-s+1 + s(p-s+1) + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot(s+1)$$

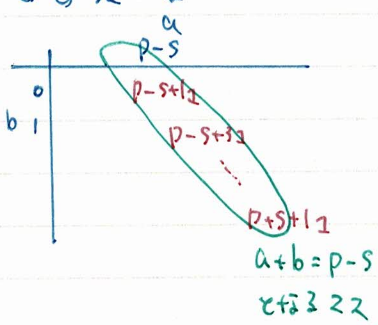
$$= \cdots$$

$$= ps+p+s+1$$

$$= (p+1)(s+1)$$

以上より、
- $s<0$ の場合、0個
- $s \geq 0$ の場合、$(p+1)(s+1)$ 個。

ex① 表では



左のマスの合計値を求めることになる。
(ほぼ、格子点と同じ)

ex② では