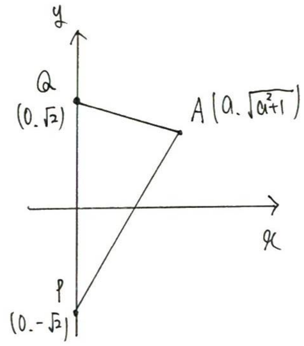
2013年　東大文系数学　第2問

(1) とりあえず計算

$PA^2 = (a-0)^2 + (\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2$

$= a^2 + a^2 + 1 + 2\sqrt{2(a^2+1)} + 2$

$= 2a^2 + 3 + 2\sqrt{2(a^2+1)}$



$QA^2 = \cdots$

$= 2a^2 + 3 - 2\sqrt{2(a^2+1)}$

PA^2とQA^2を見ると、PAやQAが二重根号になり、計算ができないような気がする。

ムリそう

$PA = \sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2(a^2+1)}}$

二重根号を外す時に必要な2が存在。外し方に立ち戻ろう　ex) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = |\sqrt{2}+1|$
和　積

和が$2a^2+3$、積が$2(a^2+1)$になる2数は？　⇒ $2(a^2+1)$と1と気付ける。

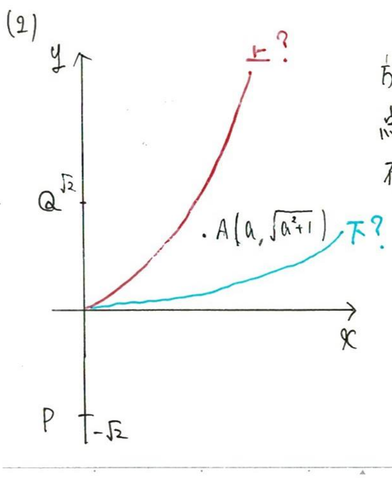
$\sqrt{\{\sqrt{2(a^2+1)}+1\}^2} = \left|\sqrt{2(a^2+1)}+1\right| = \sqrt{2(a^2+1)}+1$

同様に、$QA = \sqrt{2(a^2+1)} - 1$

よって $PA - QA = \sqrt{2(a^2+1)} + 1 - \left(\sqrt{2(a^2+1)} - 1\right) = \underline{\underline{2}}$

なので、aによらず、その値は2.

(2)



放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ が点Aの上を通るか、下を通るか不明。

調べてみる。

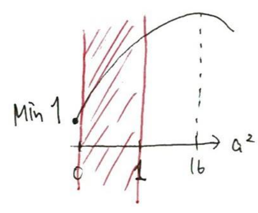
$\sqrt{a^2+1}$と$\frac{\sqrt{2}}{8}a^2$の大小を調べる

大小のcheckは不等式の証明。$\sqrt{\ }$があるので、(2乗)−(2乗)を利用

$\sqrt{a^2+1} > 0$ かつ $\frac{\sqrt{2}}{8}a^2 \geqq 0$ なので、

$(\sqrt{a^2+1})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{8}a^2\right)^2 = -\frac{1}{32}a^4 + a^2 + 1$

$= -\frac{1}{32}(a^2-16)^2 + \frac{16^2}{32} + 1$

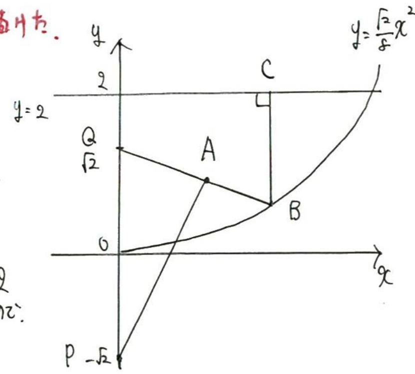


$0 \leqq a^2 \leqq 1$の範囲で最小値は$a^2 = 0$のとき、1である。

よって、$(\sqrt{a^2+1})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{8}a^2\right)^2 \geqq 1$ なので、$a^2+1 > \frac{\sqrt{2}}{8}a^2$ である。

以上より、点Aの下を放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ が通る。

右図のようになる。図が描けた。



やっと計算

次に、PA+AB+BCを計算する。　Sとおく。

(1)より $PA - QA = 2 \Leftrightarrow PA = QA + 2$ なので、

$S = PA + AB + BC$

$= (QA+2) + AB + BC$

$= QB + BC + 2$

図より $QA + AB = QB$

難　この時点で、「aによらない」⇔「点Aの場所によらない」⇔「点Bの場所によらない」と読み変えられる。
つまり点Aは、これ以降の計算では不要で、点Bの座標だけを追えばよい。

$B(b, c)$とすると、$y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$上なので、$c = \frac{\sqrt{2}}{8}b^2$ …①

$QB^2 = (b-0)^2 + (c-\sqrt{2})^2$

$= b^2 + c^2 - 2\sqrt{2}c + 2$

$c = \frac{\sqrt{2}}{8}b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4\sqrt{2}c$

$= 4\sqrt{2}c + c^2 - 2\sqrt{2}c + 2$

$= c^2 + 2\sqrt{2}c + 2$

$= (c+\sqrt{2})^2$

$\therefore QB = |c+\sqrt{2}| = c + \sqrt{2}$

$BC = |2-c|$

$= 2 - c$

点$A(a, \sqrt{a^2+1})$において、$0 \leqq a \leqq 1$から、$\sqrt{a^2+1} \leqq \sqrt{2}$となり、y座標は、$Q \geqq A$となる

B,とCも含めて並べると　$C \geqq Q \geqq A \geqq B$

よって $S = QB + BC + 2$

$= c + \sqrt{2} + 2 - c + 2 = 4 + \sqrt{2}$

なので、aによらず、一定値 $\underline{\underline{4+\sqrt{2}}}$ である。