Date

2011年 東大数学 文系第2問 理系第2問 ①

条件. $a_1 = \langle a \rangle$ aの小数部分

$a_n \neq 0$ のとき. $a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle$ 逆数の小数部分

$a_n = 0$ のとき $a_{n+1} = 0$ 以後.ずっと 0

(1) $a_1 = \langle a \rangle = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$a_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle = \sqrt{2} - 1$

同じ値になった!! もしかして.ずっと同じ値かもしれないと予想。

→ 法則を示す。

$a_n = \sqrt{2} - 1$ であることを示す。

証明1: 帰納法

(i) $n=1$ のとき. $a_1 = \sqrt{2} - 1$ より成立.

(ii) $n=k$ のとき. $a_k = \sqrt{2} - 1$ と仮定

(iii) $n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \left\langle \frac{1}{a_k} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle = \sqrt{2} - 1$$

数学的帰納法により. $a_n = \sqrt{2} - 1$

証明2: $a_k = a_{k+1} = \alpha \Rightarrow a_{k+2} = \alpha$ を示す。

(i) $n=1, 2$ のとき. $a_1 = a_2 (= \sqrt{2} - 1)$ である。

(ii) $n=k, k+1$ のとき. $a_k = a_{k+1} = \alpha$ と仮定する。

(iii) $n=k+2$ のとき.

$$a_{k+2} = \left\langle \frac{1}{a_{k+1}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{a_k} \right\rangle = a_{k+1} = \alpha$$

数学的帰納法により. すべての自然数 n で. a_n は同じ値になる。

$a_1 = \sqrt{2} - 1$ なので. $a_n = \sqrt{2} - 1$

※ 証明2 から. ある自然数 k で $a_k = a_{k+1}$ が成立すると. a_{k+2} も同じ値になることが示された。すると. これを帰納的に用いて. k 以上のすべての順番で. $a_n = a_k$ となる。 —(※)

(2) $a_1 = \langle a \rangle = a$ となるので. $0 \leqq a < 1$

また仮定から. $\frac{1}{3} \leqq a$

よって $\frac{1}{3} \leqq a < 1$ である。

$a_1 = \langle a \rangle = a$ より $a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle$ である。

$\frac{1}{3} \leqq a < 1$ より $1 < \frac{1}{a} \leqq 3$ なので.

(i) $1 < \frac{1}{a} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 1$ のとき. $a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - 1$

(ii) $2 < \frac{1}{a} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ のとき $a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - 2$

(iii) $\frac{1}{a} = 2, 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ のとき $a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = 0$

$\frac{1}{a}$ の整数部分で場合分け

(i) の場合.

$\frac{1}{a} - 1 = a$ となる。解いて. $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

これは. $\frac{1}{2} < a < 1$ を満たす。

(ii) の場合.

$\frac{1}{a} - 2 = a$ となる。解いて $a = \sqrt{2} - 1$

これは. $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ を満たす。

よって. $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2} - 1$ のとき. $a_1 = a_2$ となる。

これと. (1) の (※) より. すべての n で $a_n = a$ となるのは.

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2} - 1 \quad //$$

Date

2011年　東大数学　文系第2問　理系第2問 ②

理系(3)

$a=\frac{p}{q}$ において、pをqで割った商を a_1

〃　余りを b_1 とすると、

$p=qa_1+b_1$ である。
(但し、a_1, b_1 は整数、$0\leqq b_1<q$)

(i) $b_1=0$ のとき、$a_1=\langle qa_1\rangle=0$ となり、
$n\geqq 2$ において $a_n=0$ となり、成立

(ii) $0<b_1<q$ のとき

$$a_1=\left\langle\frac{a_1q+b_1}{q}\right\rangle=\left\langle a_1+\frac{b_1}{q}\right\rangle=\frac{b_1}{q}$$

qを b_1 で割った商を a_2

〃　余りを b_2 とすると、

$q=b_1a_2+b_2$ である。
(但し、a_2, b_2 は整数、$0\leqq b_2<b_1$)

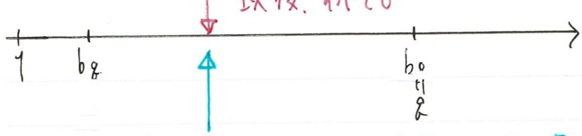
(ii−I) $b_2=0$ のとき、$a_2=\left\langle\frac{b_1a_2}{b_1}\right\rangle=0$
$n\geqq 3$ をみたす $a_n=0$ となり 成立。

(ii−II) $0<b_2<b_1$ のとき、

$$a_2=\left\langle\frac{b_1a_2+b_2}{b_1}\right\rangle=\frac{b_2}{b_1}$$

以下、同様に、b_{m-1} を b_m で割った余りを b_{m+1} とする。
但し $b_0=q$、b_m は自然数。

① $b_0\sim b_q$ の中に 0になるものがあったら、
以後、すべて0



② $b_0\sim b_q$ の中に 0になるものが、ない場合、
鳩の巣原理 により矛盾。

① $0<l<q$ となる自然数lで、$b_l=0$ となるとすると、
$n\geqq l$ で $a_n=0$ となるため、成立。

② $0\leqq n\leqq q$ において、$b_n\neq 0$ とすると、
b_nはすべて自然数で

$$1\leqq b_q<b_{q-1}<b_{q-2}<\cdots<b_1<q$$

を満たす。

ここで、$1\leqq b_q<b_1<q$ より
$b_1\sim b_q$ は、$q-1$個の異なる自然数である。

しかし、b_1 から数えて b_q は q個目の自然数である。

つまり、$q-1$個の異なる自然数 に対し、
q 個の　〃　が対応することになり
矛盾。

よって、$0<l<q$ を満たす自然数lで $b_l=0$ となるものが
必ず存在する。
すると、$b_q=0$ となる。

以上より 題意は満たされた。