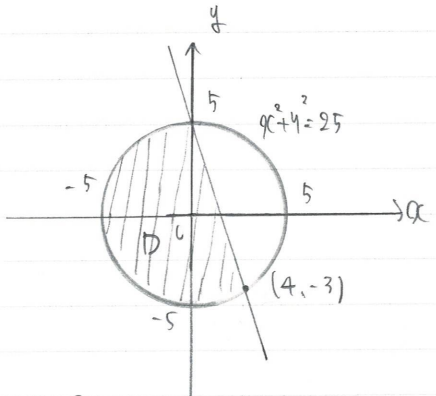


2013年 東大数学 文系第3問 ①

$x^2 + y^2 \leq 25$ かつ $2x + y \leq 5$ を満たす領域を図示せよ。下の図。(領域 D とする)



$z = x^2 + y^2 - 20x - 2by$

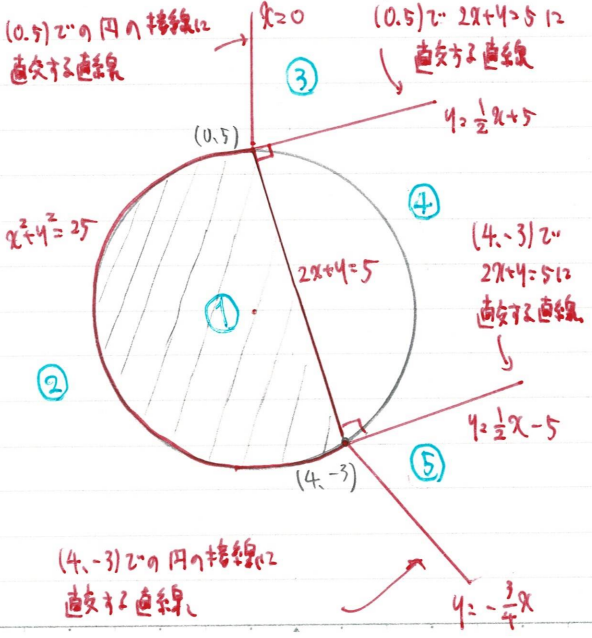
$\Leftrightarrow z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 + z$ となる。

(a, b) 中心、半径 $\sqrt{a^2 + b^2 + z}$ の円を表す。(円 C とする)

よって、円 C と領域 D が共通点を持つときは、円 C の半径の最小値を求めればよい。

考えれば最小の半径は、下の5パターン

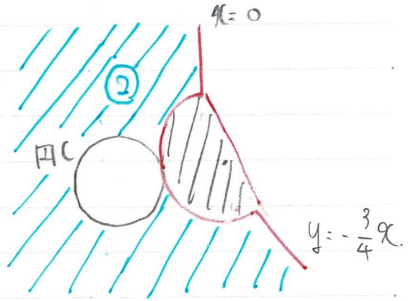


① (a, b) が ①の領域にあるとき、つまり $a^2 + b^2 \leq 25$ かつ $2a + b \leq 5$ のとき、 $\sqrt{a^2 + b^2 + z} \geq 0$ となる。円 C と領域 D が共通点を持つ。

$\sqrt{a^2 + b^2 + z} \geq 0$ を満たす z の最小値は $-a^2 - b^2$

② (a, b) が ②の領域にあるとき、つまり $a^2 + b^2 \geq 25$ かつ $\lceil a \leq 0$ かつ $b \leq -\frac{3}{4}a$ のとき、

円 C と領域 D が共通点を持つように、円 C の半径が最小にするのは、右図のように 2円が接するとき。

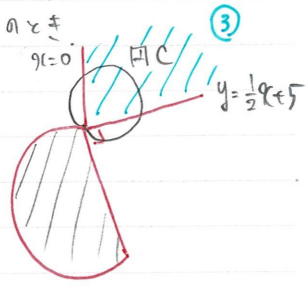


よって $\sqrt{a^2 + b^2 + z} + 5 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (中心間の距離)

$z = (\sqrt{a^2 + b^2} - 5)^2 - a^2 - b^2 = 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$

③ (a, b) が ③の領域に入るとき、つまり $0 \leq a$ かつ $b \geq \frac{1}{2}a + 5$ のとき、

円 C の半径が最小にするのは、右図のように (0,5) を通るとき。



よって (a, b) = (0, 5) (a ≠ 0) を計算し、

$\sqrt{(a-0)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + z}$
 $z = 25 - 10b$

2013年

東大数学

文系第3問②

④ (a, b) が ④の領域に入るとき

つまり, $2a+b \geq 5$ かつ $b \leq \frac{1}{2}a+5$ かつ $b \geq \frac{1}{2}a-5$ かつ

円Cの半径が最小になるのは

右図のように

円Cと $2x+y=5$ が接するとき

つまり円Cの中心 (a, b) と $2x+y=5$ との距離は

$$\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2a+b-5}{\sqrt{5}} \quad (\because 2a+b \geq 5)$$

f(0)2:

$$\frac{2a+b-5}{\sqrt{5}} = \sqrt{a^2+b^2+Z} \quad \text{よって}$$

$$Z = \frac{1}{5} (-a^2 - 4b^2 + 4ab - 20a - 10b + 25) \quad \#$$

⑤ (a, b) が ⑤の領域に入るとき

つまり $b \geq -\frac{3}{4}a$ かつ $b \leq \frac{1}{2}a-5$ かつ

円Cの半径が最小になるのは

右図のように

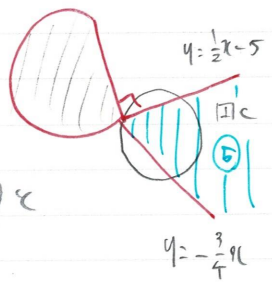
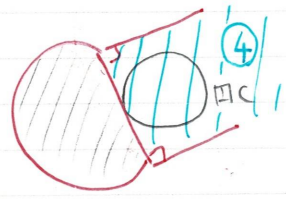
(4, -3) を通るとき

よって (a, b) と (4, -3) の間と

半径が等しいので

$$\sqrt{(a-4)^2 + (b+3)^2} = \sqrt{a^2+b^2+Z}$$

$$\therefore Z = 25 - 8a + 6b \quad \#$$



以上をまとると

① $a^2+b^2 \leq 5$ かつ $2a+b \leq 5$ かつ $-a^2-b^2$

② $a^2+b^2 \geq 25$ かつ $a \leq 0$ かつ $b \leq -\frac{3}{4}a$ かつ $25 - 10\sqrt{a^2+b^2}$

③ $0 \leq a$ かつ $b \geq \frac{1}{2}a+5$ かつ $25 - 10b$

④ $2a+b \geq 5$ かつ $\frac{1}{2}a-5 \leq b \leq \frac{1}{2}a+5$ かつ $\frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25)$

⑤ $b \geq -\frac{3}{4}a$ かつ $b \leq \frac{1}{2}a-5$ かつ $25 - 8a + 6b$