2023年 東大数学 左は区別する 文系第3問 理系第2問 ①

右は区別しない

解法X：12個の玉をすべて区別する

黒はB，赤はR，白はW

玉に名前をつけて，$B_1\ B_2\ B_3\ R_1\ R_2\ R_3\ R_4\ W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5$ とする

これらを全て横一列に並べると $12!$ 通り（全）

(1) Point

どの赤が隣り合わない→はじめに赤以外を並べてスキマに赤を配置

$B_1\ B_2\ B_3\ W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5$

の並べ方は $8!$ 通り

$\wedge B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge W_1 \wedge W_2 \wedge W_3 \wedge W_4 \wedge W_5 \wedge$

の両端かスキマの9個の∧のどこかに $R_1\ R_2\ R_3\ R_4$ を並べるので

${}_9P_4$ 通り

よって，求める確率 p は

$$p=\frac{8!\times {}_9P_4}{12!}=\cdots=\frac{14}{55}$$

(2)

$\begin{cases} A：どの赤玉も隣り合わない \\ B：どの黒玉も隣り合わない \end{cases}$ と，事象A,Bを定めると

求める確率は $q=P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

また，(1)より $p=P(A)$ なので，

よって，以下 $P(A\cap B)$ を計算する。

赤玉も黒玉も隣り合わない確率

(1)と同様，まず $W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5$ を並べ，

次に $B_1\ B_2\ B_3$ の場所を決め，

最後に $R_1\ R_2\ R_3\ R_4$ の場所を決める。

黒玉の決め方によって解法が分岐

解法X－① ：隣り合う黒玉の数によって場合分け

まず $W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5$ を並べて，

$\wedge W_1 \wedge W_2 \wedge W_3 \wedge W_4 \wedge W_5 \wedge$

白玉のスキマか両隣の6つの∧に $B_1\ B_2\ B_3$ を並べる

という方針

解法Y：同じ色の玉を区別しない

BBB RRRR WWWWW を横一列に並べると，

$\dfrac{12!}{3!\,4!\,5!}$ 通り（全）

← ${}_{12}C_3\times{}_9C_4\times 5!$ と計算してもOK.

(1) Point

どの赤が隣り合わない→はじめに赤以外を並べてスキマに赤を配置

同じ

BBB WWWWW

の並べ方は $\dfrac{8!}{3!\,5!}$ 通り

${}_8C_3$ でもok.

$\wedge B \wedge B \wedge B \wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge$

の両端かスキマの9個の∧から4つのRが入る所を選ぶので

${}_9C_4$ 通り

よって求める確率 p は

$$p=\frac{\dfrac{8!}{3!\,5!}\times{}_9C_4}{\dfrac{12!}{3!\,4!\,5!}}=\cdots=\frac{14}{55}$$

(2)

$\begin{cases} A：どの赤玉も隣り合わない \\ B：どの黒玉も隣り合わない \end{cases}$ と，事象A,Bを定めると

求める確率は $q=P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

また，(1)より $p=P(A)$ なので，

よって，以下 $P(A\cap B)$ を計算する。

赤玉も黒玉も隣り合わない確率

同じ

(1)と同様，まずWを5つを並べ，

次にB 3つの場所を決め，

最後にR 4つの場所を決める。

黒玉の決め方によって解法が分岐

解法Y－① ：隣り合う黒玉の数によって場合分け

まず W W W W W を並べる。

$\wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge$

白玉のスキマか両隣の6つの∧にBBBを並べる

(i) B_1, B_2, B_3 が隣り合わず、入るとき。

$\wedge W_1 \wedge W_2 \wedge W_3 \wedge W_4 \wedge W_5 \wedge$　W_1〜W_5 の並べ方は $5!$通り

6個の $\wedge$ のうち3か所に B_1, B_2, B_3 を並べるので ${}_6P_3$ 通り

例えば

$\wedge B_1 \wedge W_1 \wedge B_2 \wedge W_2 \wedge B_3 \wedge W_3 \wedge W_4 \wedge W_5 \wedge$ と並ぶ。

9個の $\wedge$ のうち、4か所に $R_1 R_2 R_3 R_4$ を並べるので、${}_9P_4$ 通り

よって $5! \times {}_6P_3 \times {}_9P_4$ 通り　x_1 とおく

(ii) B_1, B_2, B_3 のうち、2つと1つに分かれて入るとき。

B_1B_2 と B_3、B_1B_3 と B_2、B_2B_3 と B_1 の ${}_3C_1$ 通りの分け方がある

例えば、B_1B_2 と B_3 だとする。

B_1B_2 と B_2B_1 の $2!$ 通り の並べ方がある。

例えば B_1B_2 だとする

$\wedge W_1 \wedge W_2 \wedge W_3 \wedge W_4 \wedge W_5 \wedge$　W_1〜W_5 の並べ方は $5!$通り

6個の $\wedge$ のうち2か所に B_1B_2 と B_3 を並べるので ${}_6P_2$ 通り

例えば

$B_1B_2\ W_1\ B_3\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5$ と並ぶ。

a b c d e f g h i

a〜i のうち、必ず b に $R_1\ R_2\ R_3\ R_4$ の1つを入れて。(${}_4C_1$ 通り)

残りの3つを、a や c〜i に並べる (${}_8P_3$ 通り)

よって ${}_3C_1 \times 2! \times 5! \times {}_6P_2 \times {}_4C_1 \times {}_8P_3$ 通り　x_2 とおく

(iii) $B_1B_2B_3$ が隣り合って入るとき、

$B_1B_2B_3$ の並び替えが $3!$ 通りある。

例えば $B_1B_2B_3$ と並んだとする。

$\wedge W_1 \wedge W_2 \wedge W_3 \wedge W_4 \wedge W_5 \wedge$　W_1〜W_5 の並べ方は $5!$通り

6個の $\wedge$ のうち、どこかに $B_1B_2B_3$ が入る場所を選ぶので、${}_6C_1$ 通り

例えば

$B_1\ B_2\ B_3\ W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5$ と並ぶ

a b c d e f g h i

(i) 3つの B が隣り合わず、入るとき。

$\wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge$　W同士に区別がないので、1通り

6個の $\wedge$ のうち3か所に B を並べるので ${}_6C_3$ 通り

例えば

$\wedge B \wedge W \wedge B \wedge W \wedge B \wedge W \wedge W \wedge W \wedge$ と並ぶ。

9個の $\wedge$ のうち、4か所から、4つのRが入る場所を選ぶので、${}_9C_4$ 通り

よって $1 \times {}_6C_3 \times {}_9C_4$ 通り　y_1 とおく

(ii) 3つの B が2つと1つに分かれて入るとき

$\wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge$　W同士に区別がないので、1通り

6個の $\wedge$ のうち2か所に BB と B を並べるので ${}_6P_2$ 通り

例えば

BB W B W W W W と並ぶ。

a b c d e f g h i

a〜i のうち、必ず b に R を1つ入れて

残りの3つが入る場所を、a や c〜i の8つから3つ選ぶ (${}_8C_3$ 通り)

よって $1 \times {}_6P_2 \times {}_8C_3$ 通り　y_2 とおく

(iii) 3つの B が隣り合って入るとき、

$\wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge W \wedge$　W同士に区別がないので、1通り

6個の $\wedge$ のうち、どこかに BBB が入る場所を選ぶので、${}_6C_1$ 通り

例えば

B B B W W W W W と並ぶ

a b c d e f g h i

2023年　東大数学　文系第3問　理系第2問 ③

a〜iのうち、必ずbとcに、R_1, R_2, R_3, R_4のうち2つを並べ（$_4P_2$通り）
残りの2つを、aかdへiに並べる。$_7P_2$通り

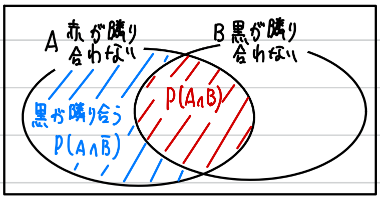
よって $3!\times 5!\times {}_6C_1\times {}_4P_2\times {}_7P_2$ 通り、x_3とおく

(i)〜(iii)から、

$$P(A\cap B)=\frac{x_1+x_2+x_3}{12!}$$

以上より、$q=\dfrac{P(A\cap B)}{p}=\cdots=\dfrac{103}{168}$

解法X−② ：黒が隣り合う確率を計算し余事象



ちなみに、$P(A)=p$ (1)のこたえ

$P(A\cap B)$を、$P(A)-P(A\cap\bar{B})$で求める。
$P(A\cap\bar{B})$は、赤が隣り合わないかつ、Bが隣り合う確率である。

(i) B_1, B_2, B_3のうち、2つと1つに分かれて入るとき、
B_1B_2とB_3、B_1B_3とB_2、B_2B_3とB_1 の$_3C_1$通りの分け方がある
例えば、B_1B_2とB_3だとする。

B_1B_2とB_2B_1の$2!$通りの並べ方がある。
例えばB_1B_2だとする
B_1B_2 B_3 W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 を並び替えて $7!$通り

例えば
B_1B_2 W_1 B_3 W_2 W_3 W_4 W_5 と並ぶ。
a b c d e f g h i

a〜iのうち、b以外の8か所に$R_1R_2R_3R_4$を並べる $_8P_4$通り

よって、$_3C_1\times 2!\times 7!\times {}_8P_4$通り　x_4とおく

※このx_4は、$B_1B_2B_3$の3つが隣り合う場合を重複して数えている。
例えば$B_1B_2B_3$の並びと、$B_1B_2B_3$が重複。よって(ii)で重複分を計算

a〜iのうち、必ずbとcに、R2つを並べ
残りの2つが入る場所を、aかdへiの7つから選ぶ（$_7C_2$通り）

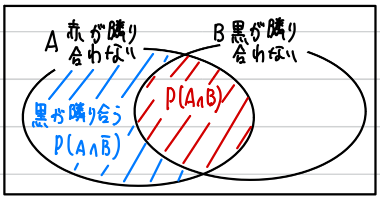
よって $1\times {}_6C_1\times {}_7C_2$ 通り、y_3とおく

(i)〜(iii)から、

$$P(A\cap B)=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{\dfrac{12!}{3!\,4!\,5!}}$$

以上より、$q=\dfrac{P(A\cap B)}{p}=\cdots=\dfrac{103}{168}$

解法Y−② ：黒が隣り合う確率を計算し余事象



ちなみに、$P(A)=p$ (1)のこたえ

$P(A\cap B)$を、$P(A)-P(A\cap\bar{B})$で求める。
$P(A\cap\bar{B})$は、赤が隣り合わないかつ、Bが隣り合う確率である。

(i) 3つのBが、2つと1つに分かれて入るとき、

BB B W W W W W を並び替えて $\dfrac{7!}{1!\,1!\,5!}$通り
セット

例えば
B B W B W W W W と並ぶ。
a b c d e f g h i

a〜iのうち、b以外の8か所から、4つのRが入る場所を選ぶ $_8C_4$通り

よって、$\dfrac{7!}{1!\,1!\,5!}\times {}_8C_4$ 通り　y_4とおく

※このy_4は、3つのBが隣り合う場合を重複して数えている。
例えばBB Bの並びと、B BBが重複。よって(ii)で重複分を計算。

(ii) $B_1B_2B_3$ が隣り合って入るとき、

$B_1B_2B_3$ の並び替えが $3!$ 通りある。

例えば $B_1B_2B_3$ と並んだとする。

$\wedge W_1 \wedge W_2 \wedge W_3 \wedge W_4 \wedge W_5 \wedge$ W_1~W_5を並べて $5!$ 通り

6個の $\wedge$ のうちどこかに $B_1B_2B_3$ が入る場所を選ぶので $_6C_1$ 通り

例えば

B_1 B_2 B_3 W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 と並ぶ

a b c d e f g h i

a~i のうち b と c 以外の7か所に $R_1R_2R_3R_4$ を並べるので $_7P_4$ 通り

よって $3! \times 5! \times {}_6C_1 \times {}_7P_4$ 通り x_5とおく

以上より $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{x_4 - x_5}{12!}$

よって $\displaystyle g = \frac{P(A) - P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \cdots\cdots = \frac{103}{168}$

(ii) 3つのBが隣り合って入るとき、

$\underbrace{BBB}_{セット}$ W W W W W を並び替えて $\dfrac{6!}{1!5!}$ 通り

例えば

B B B W W W W W と並ぶ

a b c d e f g h i

a~i のうち b と c 以外の7か所から、4つのRが入る場所を選ぶので $_7C_4$ 通り

よって $\dfrac{6!}{1!5!} \times {}_7C_4$ 通り y_5とおく

以上より $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{y_4 - y_5}{\frac{12!}{3!4!5!}}$

よって $\displaystyle g = \frac{P(A) - P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \cdots\cdots = \frac{103}{168}$