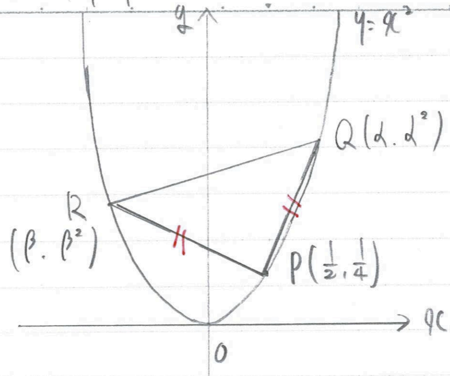
2011年　東大数学　文系第4問 ①



$G(X, Y)$ は $\triangle PQR$ の重心なので：

$$(X, Y) = \left(\frac{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}{3}, \frac{\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}}{3} \right)$$

$$\therefore \begin{cases} X = \frac{1}{3}(\alpha+\beta) + \frac{1}{6} \\ Y = \frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{12} \end{cases} \quad \cdots ①$$

実数条件を思いつく。

(α, β) が存在するための (X, Y) の条件 ＝ 軌跡

$\triangle PQR$ において、QRを底辺とする二等辺三角形をなす条件を、2通りで示す。

$\boxed{解法1}$ PQ＝PR（二等辺三角形の定義）を利用

PQ＝PRとなればよい。

$$\begin{cases} PQ^2 = \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2 \\ PR^2 = \left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2 \end{cases}$$ なので

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}+\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{16} = \beta^2-\beta+\frac{1}{4}+\beta^4-\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{16}$$

$$\alpha^4-\frac{3}{2}\alpha^2-\alpha = \beta^4-\frac{3}{2}\alpha^2-\beta$$

$$\alpha^4-\beta^4-\frac{3}{2}(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)=0$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-\frac{3}{2}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=0$$

PQRは三角形をなすので、$\alpha \neq \beta$ なので、両辺 $\alpha-\beta$ で割り

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)-1=0 \quad \cdots ②$$

$\boxed{解法2}$ QRの垂直二等分線が点Pを通る

QRの傾きは $\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha} = \alpha+\beta$

QRの中点は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ なので。

垂直二等分線の方程式は $\alpha+\beta \neq 0$ のとき、

$$y-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = -\frac{1}{\alpha+\beta}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$\alpha+\beta=0$ のとき、$Q(\alpha, \alpha^2)$ $R(-\alpha, \alpha^2)$ 垂直二等分線はy軸であるが、$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ を通らないため、不適。

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ を通るので代入して

$$\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = -\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \cdots ②$$

※．$\angle Q = \angle R$ で二等辺三角形を成立させる方法もあるが、計算が煩雑になったため、省略。

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 3X-\frac{1}{2} \\ \alpha^2+\beta^2 = 3Y-\frac{1}{4} \end{cases}$$ を②に代入して整理すると

$$Y = \frac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{12} \quad \cdots ③$$

$$Y+\frac{1}{12} = \frac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}$$

（$Y=\frac{1}{9X}$ の反比例のグラフを、X軸方向に $\frac{1}{6}$、Y軸方向に $-\frac{1}{12}$ 移動した）

$\boxed{オチケ}$

(α, β) の実数条件 かつ $\begin{cases} X = \frac{1}{3}(\alpha+\beta)+\frac{1}{6} \\ Y = \frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{12} \end{cases}$ となる (α, β) が存在

制約条件　目的関数

$\Leftrightarrow$ (X, Y) の軌跡

2011年　東大数学　文系第4問②

$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}$　$\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$　の置換

⇒ 実数条件を調べる

準備

$\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$ を、$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ に代入すると

$$3Y-\frac{1}{4}=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha\beta=\frac{18X^2-6X-6Y+1}{4}$$

ここで、$\alpha+\beta$と、$\alpha\beta$は
ある実数 t の 2次方程式 $t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$
の2解である。$\alpha\neq\beta$ なので、
判別式 $D>0$ となる。

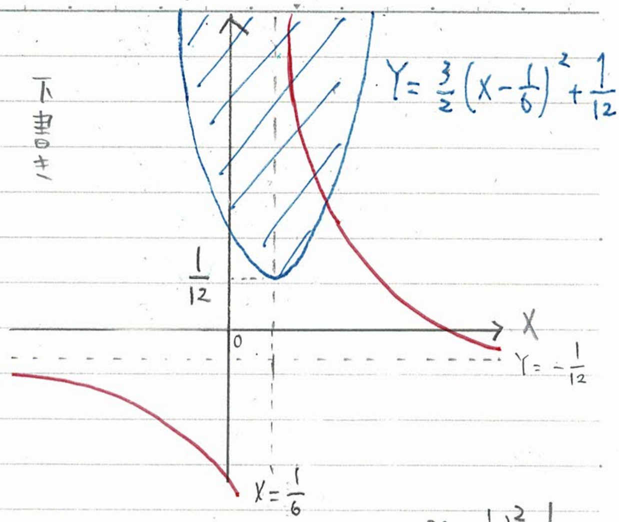
$$D=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{18X^2-6X-6Y+1}{4}$$
$$=9X^2-3X+\frac{1}{4}-18X^2+6X+6Y-1$$
$$=-9X^2+3X-\frac{3}{4}+6Y>0$$
$$\therefore\ Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\quad\cdots④$$

よって、③の式のうち、④を満たす部分が
求める軌跡。

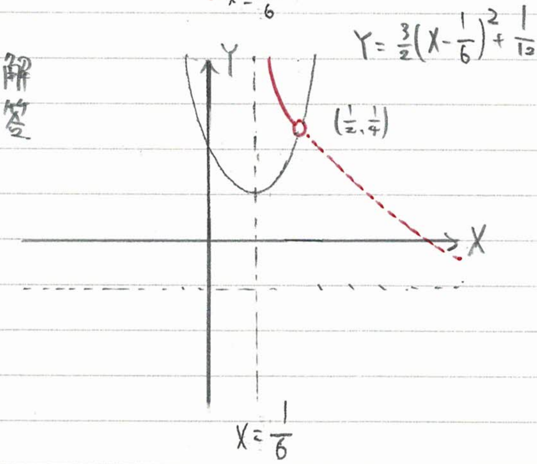
③ $Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}$

④ $Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$

下書き



解答



図の赤字の実線部分