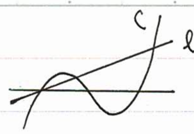
2013年　東大数学　文系第1問 ①

$C: y=x(x-1)(x-3)$

$l: y=tx$



(1) Cとlの交点を考えるため、連立すると、

$x(x-1)(x-3)=tx$

$\Leftrightarrow x(x^2-4x+3-t)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ または $x^2-4x+3-t=0$ …①

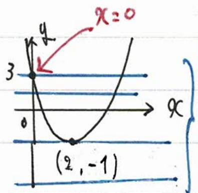
原点　　原点以外に共有点を持ってほしい。

⇒原点だけしか共有点がない、なんてありえるか。

① ⇔ $x^2-4x+3=t$ として、$y=x^2-4x+3$ と $y=t$ の交点を考えると、

右図より、$y=x^2-4x+3$ と $y=t$ は、

- $t \geqq -1$ のときに、$x=0$ のみ交点を持つということはなく、必ず $x=0$ 以外の交点がある。
- $t<-1$ のときは、交点はない。



どこでも、$x=0$以外の交点アリ。

よって、$t \geqq -1$ のときは、Cとlは、常に原点以外の交点を持つ。　以下、$t \geqq -1$ で考える。

よって、tの範囲は $t \geqq -1$

$P(p, tp)$　$Q(q, tq)$ とおく（p, qは実数）

よって、

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{p^2+t^2p^2}=|p|\sqrt{1+t^2}$

$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{q^2+t^2q^2}=|q|\sqrt{1+t^2}$　なので、

$g(t)=|p|\sqrt{1+t^2}\times|q|\sqrt{1+t^2}$

$=|pq|(t^2+1)$

計算するだけ。

ここで、p, q は、

① ⇔ $x^2-4x+3-t=0$ の2解なので、解と係数の関係より

$$\begin{cases} p+q=4 \\ pq=3-t \end{cases}$$

なので、

◀ 結果として使わないが、この時点では必ず使わない式かは判断できない。

$g(t)=|3-t|(t^2+1)=|t-3|(t^2+1)$　◀ $t=3$で折れるグラフ。

$$=\begin{cases} (t-3)(t^2+1) & (t \geqq 3 \text{ のとき}) \\ -(t-3)(t^2+1) & (-1 \leqq t \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $-1 \leqq t \leqq 3$ のとき、

$g'(t)=-3t^2+6t-1$

$g'(t)=0$ を解くと、$t=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$　$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$、$\beta=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$ とする。

増減表は、

t	-1		α		β		3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$		↘	$g(\alpha)$ 極小	↗	$g(\beta)$ 極大	↘	

(ii) $t \geqq 3$ のとき、

$g'(t)=3t^2-6t+1$

$=3(t-1)^2-2$

これは、$t \geqq 3$ で、$g'(t) \geqq 10$ なので、$g(t)$は単調増加。

よって、(i)と(ii)をまとめて、$t \geqq -1$ の増減表は、

2つの増減表を統合することで初めて見つかる極小値

t	-1		α		β		3	
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	$g(\alpha)$ 極小	↗	$g(\beta)$ 極大	↘	$g(3)$ 極小	↗

極小は、2ヶ所

よって極小値は $g(\alpha)$ と $g(3)$　極大値は $g(\beta)$

$g(3)=0$

$$\begin{cases} g(\alpha)=\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9} \\ g(\beta)=\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9} \end{cases}$$ なので、

$$\begin{cases} \text{極小値は、} \dfrac{36-4\sqrt{6}}{9} & \left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \\ \qquad\quad 0 & (t=3) \\ \text{極大値は } \dfrac{36+4\sqrt{6}}{9} & \left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$$

$g(\alpha)$ $g(\beta)$ の求め方は、2種類

割り算か、(2次)=(1次)の式で次数下げ。

詳しくは、次ページ。

2013年　東大数学　文系第1問②

求め方1．割り算

$-1 \leqq t \leqq 3$ の $g(t)$ を $g'(t)$ で割る。

$g(t) = -t^3 + 3t^2 - t + 3$

$g'(t) = -3t^2 + 6t - 1$　より．

			$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$		
-3	6	-1	-1	3	-1	3
			-1	2	$-\frac{1}{3}$	
				1	$-\frac{2}{3}$	3
				1	-2	$\frac{1}{3}$
					$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$

$$g(t) = \underbrace{g'(t)}_{\alpha と \beta は g'(t)=0 の解} \underbrace{\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\right)}_{商} + \underbrace{\frac{4}{3}t + \frac{8}{3}}_{余り}$$

$$g(\alpha) = g'(\alpha)\left(\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}\alpha + \frac{8}{3}$$

$$= 0 + \frac{4}{3} \times \frac{3-\sqrt{6}}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$$

同様に．$g(\beta) = \dfrac{36 + 4\sqrt{6}}{9}$

求め方2　次数下げ

$g'(\alpha) = -3\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0$　より

$$\alpha^2 = 2\alpha - \frac{1}{3}$$

(2次)=(1次) の式
代入すると．1次減る。

$$g(\alpha) = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha + 3$$

$$= -\alpha\left(2\alpha - \frac{1}{3}\right) + 3\left(2\alpha - \frac{1}{3}\right) - \alpha + 3$$

$$= \cdots$$

$$= -2\alpha^2 + \frac{16}{3}\alpha + 2$$

$$= -2\left(2\alpha - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{3}\alpha + 2$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{4}{3}\alpha + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{3-\sqrt{6}}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$$

同様に．$g(\beta) = \dfrac{36 + 4\sqrt{6}}{9}$

2013年　東大数学　文系第1問③

別解：ベクトルの内積を利用

$g(t) = |\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|$ から、ベクトルを想起

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$ から、

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ と $\cos\theta$ の値を調べる。

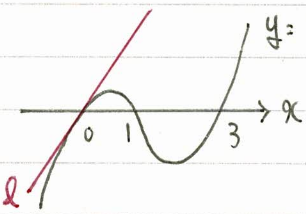
• $P(p, tp)$　$Q(q, tq)$ とおくと、

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = (p, tp)\cdot(q, tq)$　成分で内積

$= pq + t^2pq$

$= pq(1+t^2)$

• θ は t の値によって 0 か π になる。



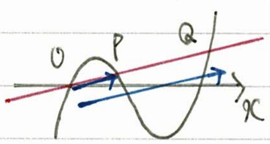
($x=0$ における接線)

$y=x(x-1)(x-3)$ の、$x=0$ における接線 l の傾きは

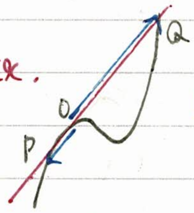
$y'=3x^2-8x+3$ に $x=0$ を代入して、

$y'=3$　よって、傾き3.

(i) $t \leqq 3$のとき



$t \geqq 3$のとき



Pが $x<0$ にくる.

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は同じ向き、　$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は逆向き

$\theta=0$, $\cos\theta=1$　　$\theta=\pi$　$\cos\pi=-1$

よって、$\cos\theta = \begin{cases} 1 & (-1 \leqq t \leqq 3) \\ -1 & (t \geqq 3) \end{cases}$

よって $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$ より

$$|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\cos\theta} = \begin{cases} pq(1+t^2) & (-1 \leqq t \leqq 3) \\ -pq(1+t^2) & (t \geqq 3) \end{cases}$$

あとは、本解答と同じ。