2012年　東大数学　文系第1問

xを定数とみなし、yで降べきの順に並べると、

予選決勝法

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0 \quad \cdots (*)$$

yは実数解をもつので、$D\geqq 0$ となる。

(x, y)が座標平面上にある条件

$$D=(4x+5)^2-4\times3\times(2x^2+4x-4)\geqq 0$$

$$16x^2+40x+25-24x^2-48x+48\geqq 0$$

$$-8x^2-8x+73\geqq 0$$

$$8x^2+8x-73\leqq 0$$

$$\frac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq \frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$$

よって、xの最大値は $\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

※「これは、xの実数解をもつ条件なので、$\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}=x$ となる x が存在する。」ということを付記すると、なお良し。

別解

(*)をyで平方完成して、

$$3\left(y+\frac{4x+5}{6}\right)^2-3\times\left(\frac{4x+5}{6}\right)^2+2x^2+4x-4=0$$

$$3\left(y+\frac{4x+5}{6}\right)^2=\frac{-8x^2-8x+73}{12}$$

(左辺)$\geqq 0$ なので、(右辺)$\geqq 0$ を解くと、

$-8x^2-8x+73\geqq 0$　　左と同じ（以下略）

制　　目

「yは実数 かつ $2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$ となる y が存在する」⇔「xの値域」