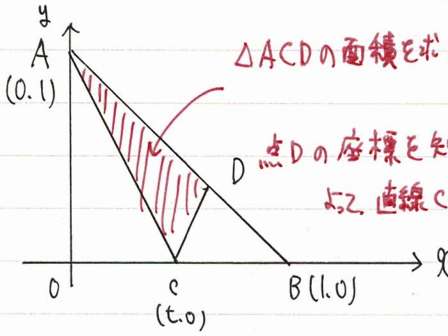
2012年　東大数学　文系第2問



△ACDの面積を求めるために
点Dの座標を知りたい。
よって、直線CDの方程式を調べる。

解法1. : tan の利用　傾き、反射(入射角＝反射角)などから、tan を想起

(補)
直線CD の傾きを m とすると、
直線AC の傾きは $-m$ である。
証明
直線CDとx軸がなす角を α とすると、$\tan\alpha = m$
直線ACとx軸がなす角は $\pi - \alpha$ なので、
直線ACの傾きは $\tan(\pi-\alpha) = -m$

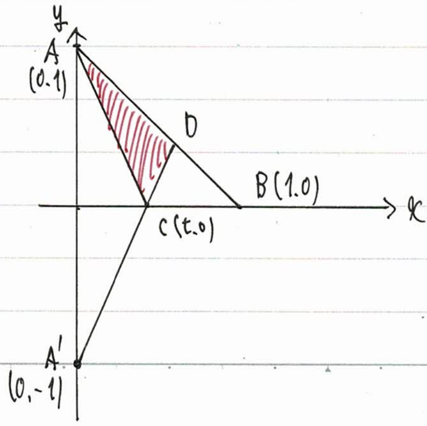
直線AC の傾きは $-\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ なので、
直線CD の傾きは $\frac{1}{t}$ である。

よって、直線CD の方程式は
$y = \frac{1}{t}(x-t)$　$\therefore\ y = \frac{x}{t} - 1$

直線AB の方程式 $x+y=1$ と連立して、

$x = \frac{2t}{t+1}$　$y = \frac{1-t}{1+t}$　よって $D\left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t}\right)$

解法2 : 線対称 の利用　反射すると、線対称な図形が登場



Aをx軸対称した点を $A'(0,-1)$ とする。
A' C D は直線上に並ぶので、
A'とCを通る直線の方程式を求める。

直線$A'C$の方程式は、

$$y - 0 = \frac{0-(-1)}{t-0}(x-t) \quad \therefore\ y = \frac{x}{t} - 1$$

解法1と同じ結果

次に、△ACD の面積を求める。

全体から引く。

$$\triangle ACD = \triangle OAB - \triangle OAC - \triangle CBD$$

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

$\triangle OCA = \frac{1}{2} \times t \times 1 = \frac{t}{2}$

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (1-t) \times \frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{2} \times \frac{(1-t)^2}{1+t}$　なので、

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-t)^2}{1+t}$$

$= \cdots$

$= 2 - t - \frac{2}{t+1}$　$= 2 - \left(t + \frac{2}{t+1}\right)$

相加相乗が使える形

△ACD が最大のとき $t + \frac{2}{t+1}$ が最小

$0 < t < 1$ のとき、$t+1 > 0$ であり、

$$t + \frac{2}{t+1} = t+1 + \frac{2}{t+1} - 1$$

$$\geqq 2\sqrt{(t+1) \times \frac{2}{t+1}} - 1$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

等号成立は、$t+1 = \frac{2}{t+1}$　$t = \sqrt{2} - 1$　($0<t<1$ を満たす)

よって、

$$\triangle ACD = 2 - \left(t + \frac{2}{t+1}\right) \leqq 2 - (2\sqrt{2} - 1)$$

$$= 3 - 2\sqrt{2}$$

以上より、$t = \sqrt{2} - 1$ のとき、
△ACD の最大値は $3 - 2\sqrt{2}$