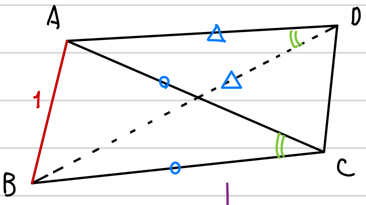
2023年　東大数学　文系第4問 ①

Point
立体図形では,
① 対称性の利用
② 高さや球の中心など特別な点を含むように切断する
の2つを利用する。

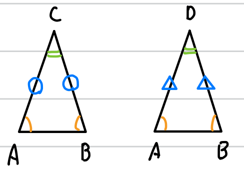


なんか合同になりそうだなと気付いて証明。
(合同だったら対称にもなるし,うれしい)

計算を始める前に考察すること(下準備)

考察① 合同の証明

△ABCと△ABDについて,



・$\cos\angle ACB = \cos\angle ADB$ より
$\angle ACB = \angle ADB$ …(A)

・どちらも二等辺三角形なので,底角が等しい

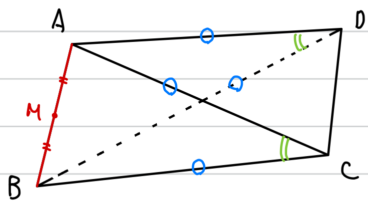
$\begin{cases} \angle CAB = \angle CBA \\ \angle DAB = \angle DBA \end{cases}$ …(B)

・(A)(B)と,三角形の内角の和は180°であることから
$\angle CAB = \angle CBA = \angle DAB = \angle DBA$ …(C)

・ABが共通で(C)が成立するので
1辺と,その両端の角が等しいので
△ABC≡△ABD

よって, AC=BC=AD=BD

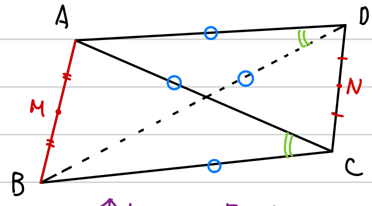
実際の答案ではここまで



合同になったので,次に対称性を利用して考察を進める。

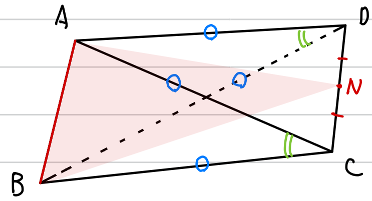
考察② 球の中心の場所の特定

AB, CDの中点をM, Nとすると



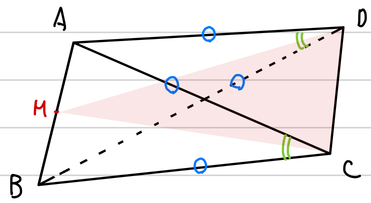
↑対称性を見つけて,切断して,球の中心を特定する。

・△ABNで切断した場合, 2つの合同な四面体にわかれる
(手前と奥)



よって,球の中心は△ABNを含む平面上にある

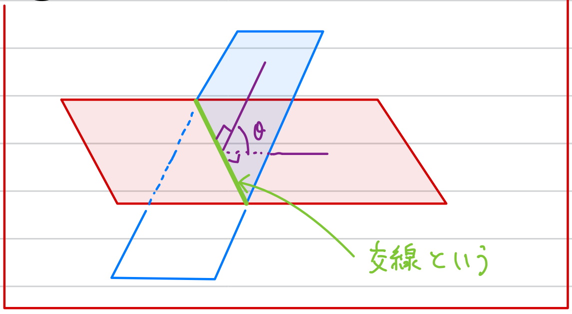
・同様に△CDMで切断した場合も
2つの合同な四面体にわかれる
(上と下)



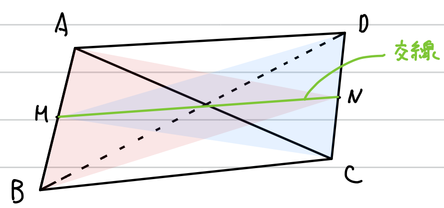
よって,球の中心は△CDMを含む平面上にある

以上より,
球の中心は△ABN上にあり,かつ△CDM上にあるため,
球の中心は△ABNと△CDMの交線上にある。

補 2平面の共有点は直線となる



△ABNと△CDMの交線は,直線MNである



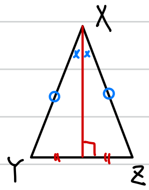
よって,球の中心は線分MN上にある。

球の中心の場所がかなり特定された

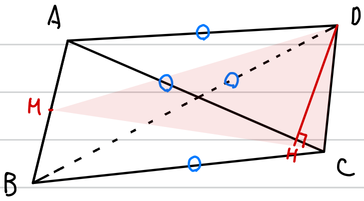
2023年　東大数学　文系第4問 ②

考察③ 高さの特定

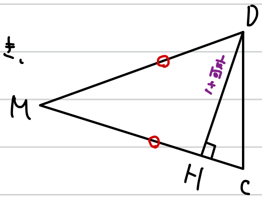
一般に、
二等辺三角形において、
頂角Xの二等分線は、
底辺と中点で直交する



△ABCと△ABDも
二等辺三角形なので、
CM⊥AB, DM⊥AB
よって AB⊥平面CDM
である。

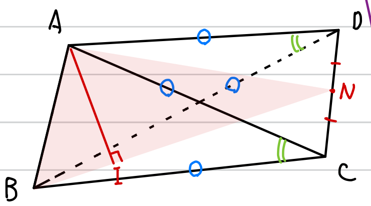


以上から、△ABCを底面とみなしたとき、
Dから下ろした垂線の足Hは
直線CM上にある。



これで△ABCに対する高さが特定された。

なお同様に、
△ACDと△BCDは
二等辺三角形なので、
AN⊥CD, BN⊥CD
よって CD⊥平面ABNと示して、

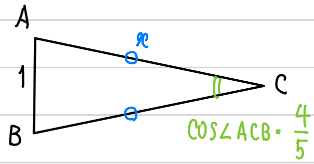


△BCDを底面とみなしたとき、の高さが
Aから下ろした垂線の足Iであると特定できるが、
(1)で△ABCの面積を求めるため、こっちは用いる優先順位は低い。

長くなりましたが、
立体図形の問題では、以上のようなことを調べられるように
なると良いです。(頻出の解法です。)

右上から、思考のプロセスに従って
解法を解説します。

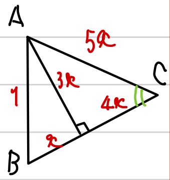
(1) AC $=x$ とおく。
△ABCに余弦定理を用い
$1^2 = x^2+x^2-2\times x\times x\times \frac{4}{5}$
∴ $x^2=\frac{5}{2}$　　$x=\sqrt{\frac{5}{2}}$



$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より
$\sin\angle ACB=\sqrt{1^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$ なので、

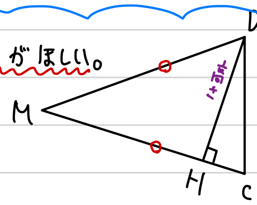
$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times x\times x\times\frac{3}{5}$
$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}$
$= \frac{3}{4}$

別解
$\cos\angle ACB=\frac{4}{5}$ から、
3:4:5の直角△を利用しても、求められる。
$x^2+(3x)^2=1$ より　$x=\frac{1}{\sqrt{10}}$
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 5x\times 3x=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{4}$

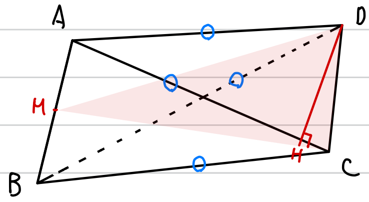


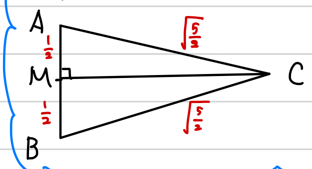
(2)　考

体積を求めるためには高さDHがほしい。
右図の△DMCにおいて
既知の長さはない。⇒1つずつ求める。



DM=CMの長さは
△ABCに注目すれば
求められる。



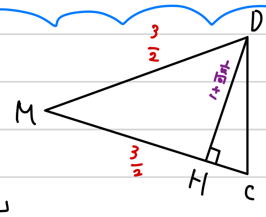


△ABCにおいて、
三平方の定理より
$CM=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$

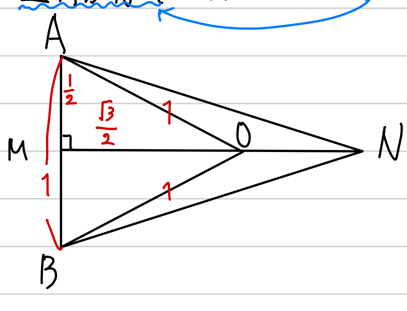
(別解　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\times CM$ より
$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times 1\times CM$
$CM=\frac{3}{2}$　でも可)

考

$CM=DM=\frac{3}{2}$ とわかったが、
まだDHを特定するのに
情報が足りない。
よって、未使用の条件である「球に内接する」
を利用する。⇒ 球の中心は考察②から、MN上にある。



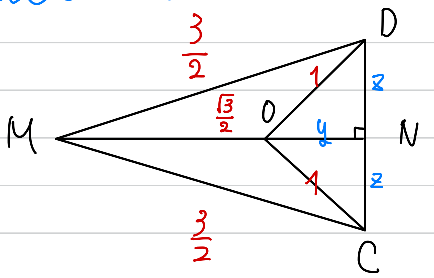
△ABNにおいて、　MNを含む三角形



OAとOBは球の半径
なので OA=OB=1
△OABは正三角形で、
OA : AM : MO = 2 : 1 : $\sqrt{3}$
なので　$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2023年　東大数学　文系第4問 ③

△CDMにおいて。　これも、MNを含む



OC, OD は球の半径なので OC = OD = 1.

ON = y, DN = CN = z とおくと

△ONDと△MNDで三平方の定理を立てて

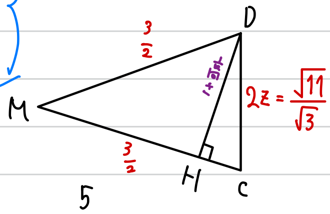
$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{cases}$$

yとzの連立方程式を解いて

$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad z = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

CDがわかった!!

やっと△CDMの3辺が判明!!
あとは、DHを求めるだけ。



余弦定理より

$$\cos\angle CMD = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} = \cdots = \frac{5}{27}$$

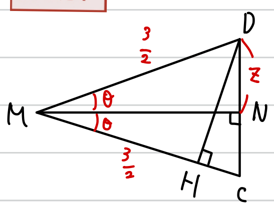
$$\sin\angle CMD = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{27}\right)^2} = \cdots = \frac{8\sqrt{11}}{27}$$

$$\therefore\ DH = DM \times \sin\angle CMD$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{8\sqrt{11}}{27} = \cdots = \frac{4}{9}\sqrt{11}$$

やっと高さがわかった。

$$(\text{四面体ABCDの体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times DH$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{9}\sqrt{11} = \frac{\sqrt{11}}{9}$$
//

別解



MNが角の二等分線であるのを利用して、

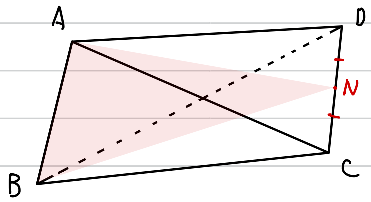
$$\sin\theta = \frac{z}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} \qquad \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\sin\angle CMD = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$ ◀2倍角

$$= 2 \times \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} \times \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{11}}{27}$$

と求めてもよい。

別解



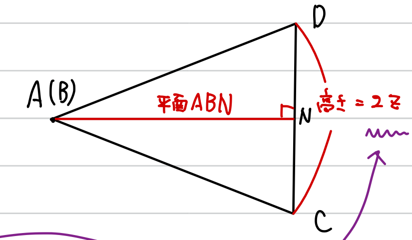
↓真横から見ると

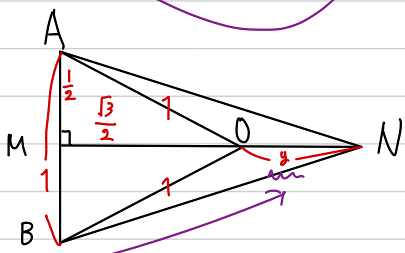
考察③より、
CD ⊥ 平面ABN なので、

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABN \times CD$$

と求められる。

△ABCを底面とみない





$$\triangle ABN = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + y\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、

$$(\text{四面体ABCDの体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABN \times CD$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}}{9}$$
//

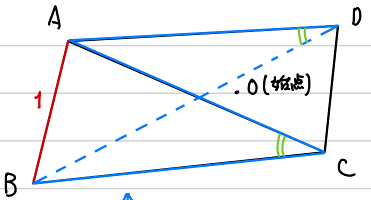
2023年 東大数学 文系第4問 ④

別解 全然ちがう方針としてベクトルの利用。

考察①〜③は利用することにする。

Oを球の中心とする。
基底のベクトルを
$\vec{OA}=\vec{a}$ と $\vec{OB}=\vec{b}$ と $\vec{OC}=\vec{c}$
に設定する。

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ (半径)



考察①から、AC=BC=AD=BD は判明している

$|\vec{AB}|=1$ より $|\vec{AB}|^2=1$

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=1$ から、$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

$|\vec{AC}|=|\vec{BC}|$ より $|\vec{AC}|^2=|\vec{BC}|^2$

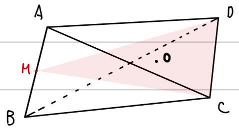
$|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2$

$|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$1-2\vec{a}\cdot\vec{c}+1=1-2\vec{b}\cdot\vec{c}+1$

∴ $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$

考察②から、四面体は△CDMに関して対称なので $\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}$ ともできる。



$\cos\angle CAB=\frac{4}{5}$ から、

$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=|\vec{CA}||\vec{CB}|\cos\angle CAB$

$|\vec{CA}|=|\vec{CB}|$

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=|\vec{a}-\vec{c}|^2\times\frac{4}{5}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=\frac{4}{5}(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)$

$\frac{1}{2}-2\vec{a}\cdot\vec{c}+1=\frac{4}{5}(1-2\vec{a}\cdot\vec{c}+1)$

∴ $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{4}$

以上で 基底のベクトルの大きさと内積が全てわかった!!
あとは単純な計算のみ

まとめ

$$\boxed{\begin{array}{l}|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{4}\end{array}}$$

(1)

$|\vec{CA}|$を求めるので、2乗する。 大きさは2乗

$|\vec{CA}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$=1+2\times\frac{1}{4}+1$

$=\frac{5}{2}$

∴ $|\vec{CA}|=\sqrt{\frac{5}{2}}$

仮定から、$|\vec{CB}|=\sqrt{\frac{5}{2}}$

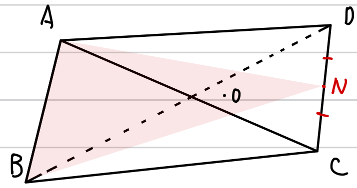
面積公式に代入するための仕込み

$\vec{CA}\cdot\vec{CB}$
$=(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$
$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1$
$=2$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{CA}|^2|\vec{CB}|^2-(\vec{CA}\cdot\vec{CB})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}-2^2}=\frac{3}{4}$ //

(2) Nは、平面OAB上にあり、
△ABNは二等辺三角形なので、
$\vec{ON}=n(\vec{a}+\vec{b})$ と表せる
nは実数

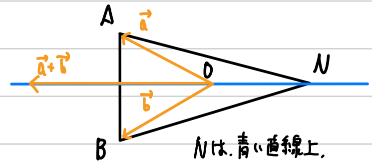


$\vec{CD}=2\vec{CN}$ より $\vec{d}-\vec{c}=2(\vec{n}-\vec{c})$

$\vec{d}=\vec{c}+2\vec{n}-2\vec{c}$

$=2\vec{n}-\vec{c}$

∴ $\vec{d}=2n\vec{a}+2n\vec{b}-\vec{c}$



Nは、青い直線上。

$|\vec{d}|=1$ より、$|2n\vec{a}+2n\vec{b}-\vec{c}|=1$ 2乗

$4n^2|\vec{a}|^2+4n^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+8n^2\vec{a}\cdot\vec{b}-4n\vec{a}\cdot\vec{c}-4n\vec{b}\cdot\vec{c}=1$

$4n^2+4n^2+1+4n^2+n+n=1$

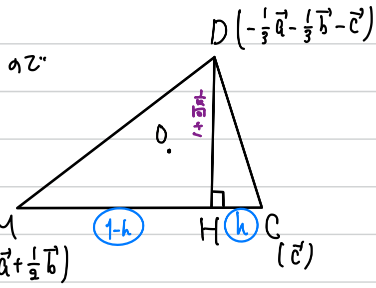
$12n^2+2n=0$ ∴ $n=-\frac{1}{6}$ nを特定

$\begin{cases}\vec{n}=-\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\\ \vec{d}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}\end{cases}$ NとDを特定

△CDMにおいて、HはCM上なので

$\vec{OH}=h\vec{OM}+(1-h)\vec{OC}$ h:1-hの内分点

$=h\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+(1-h)\vec{c}$



$\vec{DH}=\vec{h}-\vec{d}$

$=\left(\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}\right)(\vec{a}+\vec{b})+(2-h)\vec{c}$

$\vec{CM}=\vec{m}-\vec{c}$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$

垂直条件の仕込み

$\vec{DH}\perp\vec{CM}$ なので $\vec{DH}\cdot\vec{CM}=0$ より

$\left(\left(\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}\right)(\vec{a}+\vec{b})+(2-h)\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right)=0$

展開してhを求めると、$h=\frac{22}{27}$

代入して、$\vec{DH}=\frac{20}{27}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{32}{27}\vec{c}$

$|\vec{DH}|^2=\left(\frac{20}{27}\right)^2|\vec{a}+\vec{b}|^2+2\times\frac{20}{27}\times\frac{32}{27}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+\left(\frac{32}{27}\right)^2|\vec{c}|^2$

$=\cdots=\frac{176}{81}$

∴ $|\vec{DH}|=\frac{4\sqrt{11}}{9}$

(体積) $=\frac{1}{3}\triangle ABC\times DH$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4\sqrt{11}}{9}=\frac{\sqrt{11}}{9}$ //

ベクトルを使うと
計算量は増えるが、
機械的に処理できる。