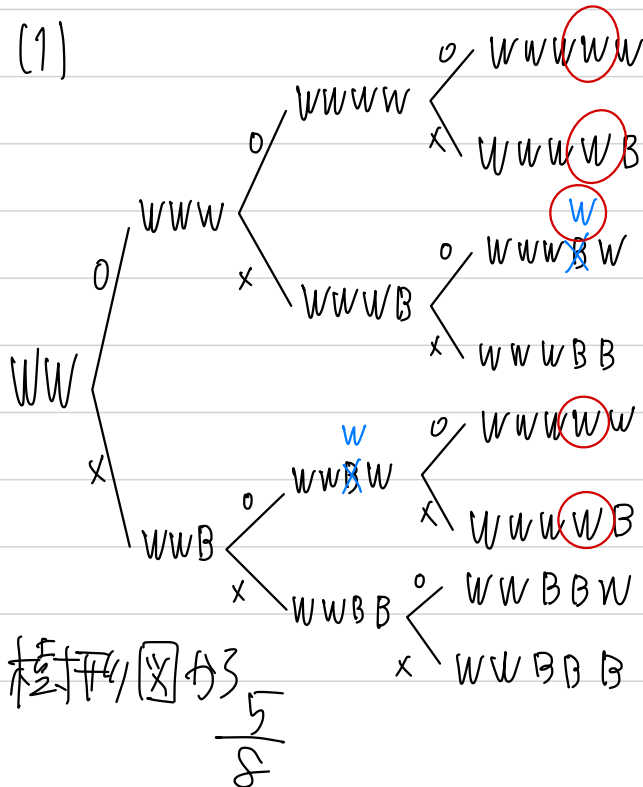
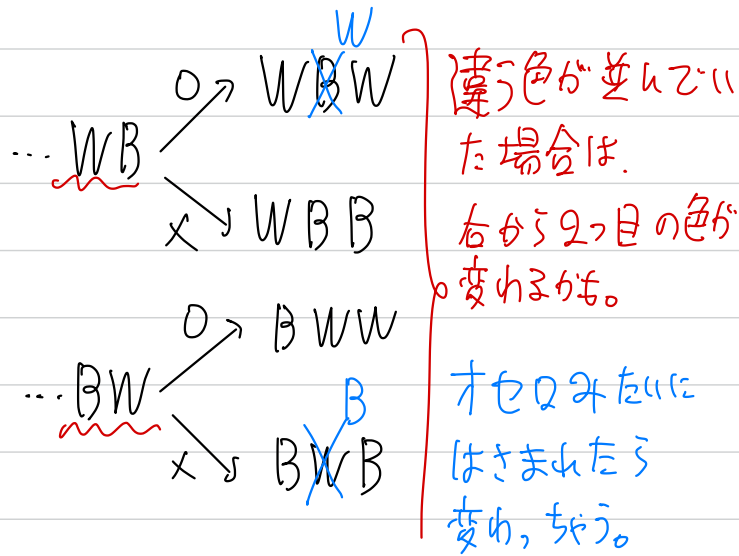
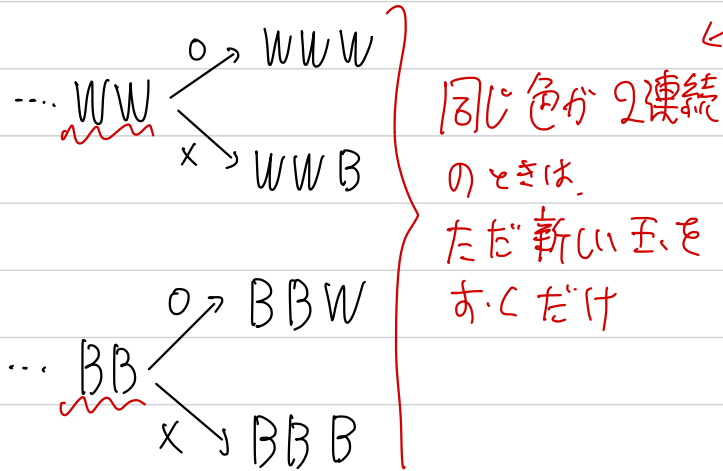


簡単のため、白玉はW、黒玉はB、ゴムの表はO、裏はXとします。

まず、ルールの正確に理解



(2)(3)この辺りでや、右のように、列の一番右と、二番目の2つだけ見れば、その後の展開がわかる。(左の方は関係ない)

手順(X)をN回行ったあと、

右から2つが WWの状態を P 、その確率を p_n

BB	:	Q	:	q_n
WB	:	R	:	r_n
BW	:	S	:	s_n

とする

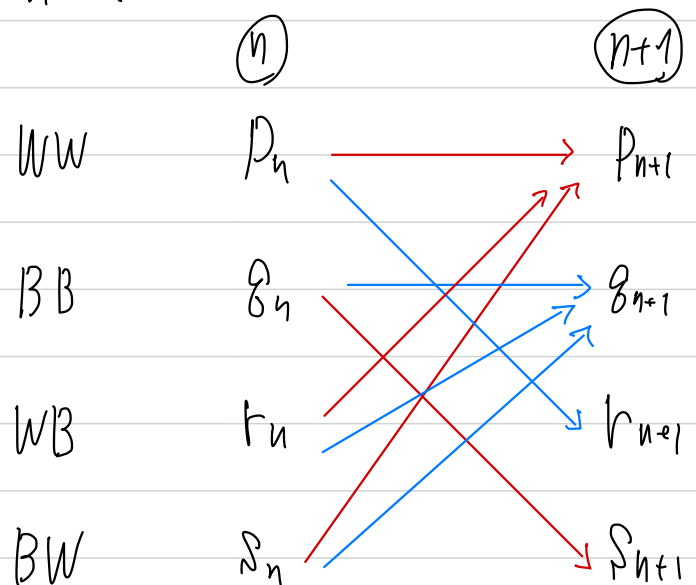
$n=0, n=1$ のときの樹形図

つまり、
$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \\ r_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2} \\ q_1 = 0 \\ r_1 = \frac{1}{2} \\ s_1 = 0 \end{cases}$$
 である。



(1)で樹形図を作っておくと便利♪

p_n, q_n, r_n, s_n の遷移図を作ると、



遷移図を参考に漸化式を立てる。

$$\begin{cases} P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}S_n & \dots (1) \\ g_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}S_n & \dots (2) \\ r_{n+1} = \frac{1}{2}P_n & \dots (3) \\ S_{n+1} = \frac{1}{2}g_n & \dots (4) \end{cases}$$

また、必ず P, Q, R, S のどれかの状態になるので、

$$P_n + g_n + r_n + S_n = 1 \quad \dots (5)$$

①～⑤ から、漸化式を解く。

※ ここからは、漸化式が解ければ良いので、

色々な手法が考えられますが、思いつきやすそうなものを、いくつか紹介します。

また、(2) は $P_n + r_n$ (3) は P_n を求めればよいですが、 g_n, S_n について値を出します。

解法

(発想)

P_n と g_n, r_n と S_n が似ているので、和や差をとってみる。

$$\begin{cases} P_{n+1} + g_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}g_n + r_n + S_n & \text{⑥ 代入して解4式。} \\ P_{n+1} - g_{n+1} = \frac{1}{2}P_n - \frac{1}{2}g_n & \text{①} \\ r_{n+1} + S_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}g_n & \text{②} \\ r_{n+1} - S_{n+1} = \frac{1}{2}P_n - \frac{1}{2}g_n & \text{③} \end{cases}$$

色々気付けるので、(7)が使いやす。

①より $P_{n+1} - g_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n - g_n)$ となる。

$\{P_n - g_n\}$ は初項 $P_1 - g_1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$
公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$$P_n - g_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$P_n - g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

⑧より $r_n + S_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}g_{n-1}$

⑥に代入して、

$$P_{n+1} + g_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}g_{n-1}$$

$$P_{n+1} + g_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + g_n) + \frac{1}{2}(P_{n-1} + g_{n-1})$$

$\{P_n + g_n\}$ の3項間漸化式を解く

⑤+算×⑥

$$P_n + g_n = Q_n \text{ とし、1つずらし。}$$

$$Q_{n+2} = \frac{1}{2}Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n$$

$$Q_{n+2} - Q_{n+1} = -\frac{1}{2}(Q_{n+1} - Q_n)$$

$$Q_{n+1} - Q_n = (Q_1 - Q_0) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$Q_0 = 1 - 0$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$Q_{n+2} + \frac{1}{2}Q_{n+1} = Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n$$

$$Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n = Q_1 + \frac{1}{2}Q_0$$

$$= 1$$

$$\begin{cases} Q_{n+1} - Q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}Q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1$$

$$Q_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$\therefore P_n + g_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

2025年

東大数学

文系第3問(3)

(1) $p_n + e_n$ は (6) : (5) $\Leftrightarrow h_{n+1} S_n = 1 - p_n - e_n$ を代入し、

$$\begin{aligned} p_{n+1} + e_{n+1} &= \frac{1}{2}(p_n + e_n) + 1 - (p_n + e_n) \\ &= -\frac{1}{2}(p_n + e_n) + 1 \end{aligned}$$

とわかる。

$$q_{n+1} = -\frac{1}{2} q_n + 1 \quad \text{とわかる}$$

3項間より、たまたまこの式が得られる。

$$p_n - e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p_n + e_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \quad \text{+ (1) の (2):}$$

$$(4) \quad 2p_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$p_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{(3) の答}$$

$$e_n = p_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$e_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$e_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(3) に p_n を代入し、

$$h_{n+1} = \frac{1}{2} p_n$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

↓ n を 1 減らす

$$\therefore h_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(4) に e_n を代入

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} e_n$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \text{↓ } n \text{ を 1 減らす}$$

$$S_n = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} p_n + h_n &= \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} + \left\{ \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$p_n + h_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(2) の答}$$

※ ちがひに $n=3$ を代入すると、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{となり (1) の答と一致。}$$

解法 2

発想

(3) の答が p_n を求めることなので、 p_n 以外を消去。
 p_n の漸化式を作る。

(1) に (5) $\Leftrightarrow p_n + h_n + S_n = 1 - e_n$ を代入し、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e_n) \quad \text{または } e_n = (p_n \text{ の式}) \text{ を代入すればよいから、この式を作る。}$$

(2) に (5) $\Leftrightarrow e_n + h_{n+1} S_n = 1 - p_n$ を代入し、

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - p_n) \quad \text{↑ 作った!!}$$

n を 1 減らす。 $e_n = \frac{1}{2} (1 - p_{n-1})$ を代入

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 - p_{n-1}) \right\}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} p_{n-1}$$

↑ p_n を使っている。

↑ ↑ ↑
 $p_{n+1} + e_{n+1}$
 $p_{n+1} - e_{n+1}$
を思いつくまで
OK.

解法 1 へ
GO

$P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}$ は 1つだけ項同士の関係式。これは、**偶奇で場合分け**。

※ 1つ n をずらして $P_{n+2} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}$ の方が偶奇の漸化式といえる。よくある形。

どちらでもよいが、わかりやすいので

$$P_{n+2} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4} \text{ で進める。}$$

(i) $n=2m$ (偶数) のとき。

$$P_{2m+2} = \frac{1}{4}P_{2m} + \frac{1}{4}$$

$$P_{2m} = P'_m \text{ とおく。}$$

偶奇の漸化式を解くときに便利

$$P'_{m+1} = \frac{1}{4}P'_m + \frac{1}{4}$$

特性方程式 $d = \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}$ の $\frac{1}{3}$

$$P'_{m+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(P'_m - \frac{1}{3})$$

$$P'_m - \frac{1}{3} = (P'_0 - \frac{1}{3}) \times (\frac{1}{4})^m \quad P'_0 = P_0 = 1$$

$$P'_m = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{4})^m + \frac{1}{3}$$

P'_m を P_m に戻す

$$\therefore P_{2m} = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{4})^m + \frac{1}{3}$$

$2m=n$ より $m = \frac{n}{2}$

$$P_n = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3} \quad (n \text{ は偶数})$$

(ii) $n=2m-1$ (奇数) のとき

$$P_{2m+1} = \frac{1}{4}P_{2m-1} + \frac{1}{4}$$

$$P_{2m-1} = P''_m \text{ とおく}$$

奇数 ver.

$$P''_{m+1} = \frac{1}{4}P''_m + \frac{1}{4}$$

特性方程式 $d = \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}$ の $\frac{1}{3}$

$$P''_{m+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(P''_m - \frac{1}{3})$$

$$P''_m = (P''_1 - \frac{1}{3}) \times (\frac{1}{4})^{m-1} + \frac{1}{3} \quad P''_1 = P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_{2m-1} = \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{m-1} + \frac{1}{3}$$

P''_m を P_m に戻す

$$P_n = \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$n=2m-1$ より $m = \frac{n+1}{2}$

$(n \text{ は奇数})$

$$\text{よって、} \begin{cases} n \text{ が偶数のとき } P_n = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3} \\ n \text{ が奇数のとき } P_n = \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

※ 解法1 で求めた

$$P_n = \frac{1}{3} + (\frac{1}{2})^{n+1} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n+1} \text{ と}$$

違う式に見えるが、確かめてみれば同じになる。

つまり別の表現というだけ。これはこれで正しい。

でも、偶奇に分かれています。 a_n, b_n, s_n などと

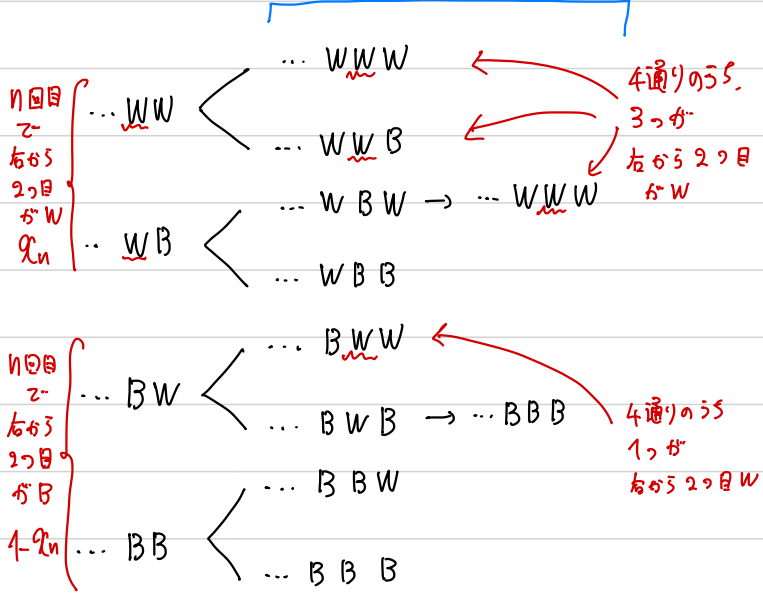
表わすのが面倒なので、オスズはしなう。

解法3 バストプンサーかも

(2)

[n回目]

[n+1回目]



よって、求める確率を Q_n とすると

$$Q_{n+1} = \frac{3}{4}Q_n + \frac{1}{4}(1-Q_n)$$

n回目にとき n回目にとき
 左から2つ目がW 左から2つ目がB
 左から3つ目がW 左から3つ目がB
 n+1回目も n+1回目に
 左から2つ目がW 左から2つ目がW

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{4} \text{ を解き、 } Q_n = (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}$$

(3)

条件が成り立つのは、以下の2つ

① n 回目までの手順で出た玉の色は関係なく

$(n+1)$ 回目には表, $(n+2)$ 回目には表

② n 回目の手順で右2つが WW で
 $(n+1)$ 回目には裏, $(n+2)$ 回目には表が出る

求める確率を p_n とする。

$$p_{n+2} = \underbrace{1}_{\substack{\text{n までは} \\ \text{何でもよい}}} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{n+1 と n+2 は} \\ \text{WW}}} + p_n \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{n までは} \\ \text{WW}}} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{n+1 と n+2 は} \\ \text{WW}}}$$

n と $n+2$ の関係は n の
 偶奇の±場合分け
 (東大で頻出)

解法2と同じ式が得られた。(以下省略)