2026年　東大数学　文系第1問①

本問の構造

・登場するのは k. α. β の3文字

・$y=k(x-\alpha)(\beta-x)$ の頂点が (-3.1) から
等式が2本立てられる。◀平方完成？別の式？

⇒ k. α. β のうち 2文字消える。◀どれを消す？
$3-2=1$
式によっては1文字しか消させないかも

・y切片が $-2\leqq y\leqq 0$ から
k. α. β の不等式が得られる。

⇒ 2文字消して、残った1文字の範囲にする。

・$k>0$ と $\alpha<\beta$ から、さらに厳密な範囲

⇒残った1文字の定義域に　不等式を「かつ」で結ぶ

・S を計算すると、S=(kとαとβの式)
2文字消して 1文字残す。

⇒ 定義域内の値域を探す。

イメージ

頂点の情報 ⇒ 等式2本
切片と $k>0$, $\alpha<\beta$　残り1文字の不等式
S=(kとαとβの式)　S=(残り1文字の式)　値域

ココまでが方針　ココより下は解答

解法1. 平方完成

頂点の条件なので
とりあえず平方完成
でやってみる

$$k(x-\alpha)(\beta-x)$$
$$=-k(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=f(x) \text{ とおく}$$

@平方完成

$$f(x)=-k\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=-k\left\{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}+\alpha\beta\right\}$$
$$=-k\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\frac{k(\beta-\alpha)^2}{4}$$

頂点は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{k(\beta-\alpha)^2}{4}\right)$

よって
$$\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-3\\ \dfrac{k(\beta-\alpha)^2}{4}=1\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}\alpha+\beta=-6 & \text{使いやすい}\\ k(\beta-\alpha)^2=4 & \text{使いづらい}\end{cases}$$

等式2本

@y切片

$f(0)=-k\alpha\beta$ より　　不等式1本

$-2\leqq -k\alpha\beta\leqq 0$　∴ $0\leqq k\alpha\beta\leqq 2$

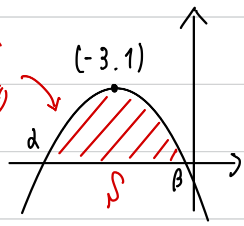
@問題文の条件

$k>0$　$\alpha<\beta$

@面積

右図の面積を求める。

$\frac{1}{6}$公式の形



$$S=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$
$$=-k\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3$$

S=(k.α.βの式)

考えること

$\alpha+\beta=-6$ と $k(\beta-\alpha)^2=4$ を使って　使いづらい
$0\leqq k\alpha\beta\leqq 2$ と $k>0$, $\alpha<\beta$ と $S=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3$ を
どう簡単に処理できるようにするか。
このまま進まず、平方完成以外を試すのもアリ。

↓このまま進むと判断した場合の解答

$$k(\beta-\alpha)^2=4 \text{ より}$$
$$k\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=4$$
α+β=−6を代入
$$k\{(-6)^2-4\alpha\beta\}=4$$
$$36k-4k\alpha\beta=4$$
kαβが出た！
ラッキー
$0\leqq k\alpha\beta\leqq 2$ に代入しやすい
$$\therefore\ k\alpha\beta=9k-1$$

2026年 東大数学 文系第1問②

$0 \leqq k\alpha\beta \leqq 2$ に代入し

$0 \leqq 9k-1 \leqq 2$

$1 \leqq 9k \leqq 3$

$\therefore \frac{1}{9} \leqq k \leqq \frac{1}{3}$ ◀ kの範囲が、カンタンな形で得られたので、今後の方針は α.β を消して、kを残すようにしたい。

これは $k>0$ を満たす。よって kの範囲は $\frac{1}{9} \leqq k \leqq \frac{1}{3}$

これが定義域

なお、$\alpha<\beta$ に関しては、使わなくてもよい。
$\alpha+\beta=-6$, $k(\beta-\alpha)^2=4$, $0 \leqq k\alpha\beta \leqq 2$ は
αとβの対称性があり、仮にαとβの値を求めた場合に
大きい方をβ、小さい方をαとすればよい。
$S=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3$ は $\alpha<\beta$ を使って計算をしている。つまり
$\alpha<\beta$ が反映された値

$S=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3$ に $k(\beta-\alpha)^2=4$ を代入して、kを残したい。

$k(\beta-\alpha)^2=4$ を $\frac{3}{2}$ 乗して $k\sqrt{k}(\beta-\alpha)^3=8$ を代入する

$k(\beta-\alpha)^3=\frac{8}{\sqrt{k}}$ として、

$S=\frac{1}{6}\times\frac{8}{\sqrt{k}}=\frac{4}{3\sqrt{k}}$

$\frac{1}{9} \leqq k \leqq \frac{1}{3}$ より

√をとる。大小や符号は変わらない

$\frac{1}{3} \leqq \sqrt{k} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$

逆数をとる。大小逆転

$\sqrt{3} \leqq \frac{1}{\sqrt{k}} \leqq 3$

$\times\frac{4}{3}$

$\frac{4\sqrt{3}}{3} \leqq \frac{4}{3\sqrt{k}} \leqq 4$

$S=\frac{4}{3\sqrt{k}}$

$\frac{4\sqrt{3}}{3} \leqq S \leqq 4$

$\therefore \frac{4\sqrt{3}}{3} \leqq S \leqq 4$

解法2、恒等式の利用

$y=f(x)$ は、2次の係数が $-k$ で、頂点 $(-3,1)$ なので

$f(x)=-k(x+3)^2+1$ とおける。

展開して、

$f(x)=-kx^2-6kx-9k+1$

また、$f(x)=k(x-\alpha)(\beta-x)$

$=-kx^2+k(\alpha+\beta)-k\alpha\beta$ なので

係数を比較して、

$$\begin{cases} -6k=k(\alpha+\beta) \\ -9k+1=-k\alpha\beta \end{cases}$$

◀ 平方完成と同じ結果でも煩雑さも同じ

解法3、(−3,1)を代入

$f(x)=-k\{x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{ココの半分}}x+\alpha\beta\}$ より 軸は $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=-3$ $\therefore \alpha+\beta=-6$ (頂点のx座標)

頂点が $(-3,1)$ なので、$f(-3)=1$ である。

$-k(-3-\alpha)(-3-\beta)=1$

$\therefore -k\alpha\beta-3k(\alpha+\beta)-9k=1$

$\alpha+\beta=-6$ を代入し、

$-k\alpha\beta+18k-9k=1$

$k\alpha\beta=9k-1$

同じになる。

コレは単に(−3,1)を通る条件。
「頂点で」という制約がない分、
ユルい条件だが、
上で「軸＝−3」を立式しているので「かつ」で結ぶことにより
「頂点で(−3,1)を通る条件」になるのでOK

解法4、ウマイ工夫

ベストアンサーだけど
あまり見ない方法

$y=f(x)$ は、2次の係数が $-k$ で、頂点 $(-3,1)$ なので

$f(x)=-k(x+3)^2+1$ とおける。

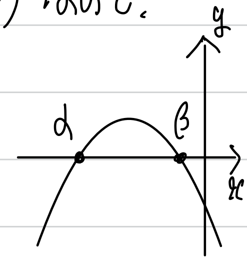
ココまで解法2と同じ

2026年　東大数学　文系第1問③

$f(x)=0$ の解が $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ なので、

$-k(x+3)^2=1$ を解き、

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}-3$$



よって

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{k}}-3,\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{k}}-3$$

となる。

αとβがkで表せているので、
とても使いやすい

頂点が(-3, 1)と α<β を既に
使ってある状態

$$f(0)=-k\alpha\beta$$

$$=-k\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-3\right)$$

$$=-9k+1$$ なので

範囲も
カンタンに
でる

$$-2\leqq -9k+1\leqq 0 \qquad \therefore \frac{1}{9}\leqq k\leqq\frac{1}{3}$$

$$S=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{k}{6}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-3\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}-3\right)\right\}^3$$

$$=\frac{k}{6}\times\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)^3$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{k}}$$

あとは解法1〜3と
同じ